

Contributions à la résolution globale de problèmes bilinéaires appliqués à l'industrie porcine

Émilie Joannopoulos

IRMAR - INSA

Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke



UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Juin 2018

Le 6 juin 2018

Le jury a accepté le mémoire de Madame Emilie Joannopoulos dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur François Dubeau
Directeur de recherche
Département de Mathématiques
Université de Sherbrooke

Professeur Jean-Pierre Dussault
Co-directeur de recherche
Département d'Informatique
Université de Sherbrooke

Professeur Mounir Haddou
Co-directeur de recherche
IRMAR - INSA Rennes

Professeur Paul Armand
Évaluateur externe
Université de Limoges

Professeur Charles Audet
Évaluateur externe
Polytechnique Montréal

Professeur François Clautiaux
Évaluateur externe
Institut de Mathématiques de Bordeaux

Professeur Abdel Lisser
Président
Laboratoire de Recherche en Informatique
Université Paris Sud

Un esprit sain dans un porc sain.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'élaboration et l'étude de modèles représentant l'alimentation de porcs en croissance.

Elle présente deux objectifs principaux. Un objectif pratique et un objectif théorique. L'objectif pratique consiste à développer de nouvelles méthodes d'alimentation afin de réduire les coûts d'alimentation et de prendre en compte les rejets environnementaux. L'objectif théorique consiste en une étude approfondie du modèle bilinéaire appliqué à l'industrie porcine afin d'obtenir des résultats tant numériques que théoriques.

Aujourd'hui, l'alimentation représente plus de 70% du coût de production en engraissement porcin et dans le contexte économique actuel, il est important de parvenir à réduire ce coût. L'alimentation utilisée actuellement dans l'industrie porcine est une alimentation par phase, représentée par un modèle linéaire. L'alimentation par mélanges telle qu'elle a été introduite récemment est représentée par un modèle bilinéaire et permet une réduction du coût de l'alimentation de plus de 4%. Nous introduisons ici une nouvelle méthode de formulation qui est une combinaison de l'alimentation traditionnelle et de l'alimentation par mélanges : la méthode hybride. Nous montrons que la mise en place d'une telle alimentation permet de réaliser une économie de plus de 5%. L'industrie porcine étant fréquemment citée comme activité polluante, notamment à cause de l'apport important de phosphates et de nitrates lors de l'épandage de lisier, nous devons faire notre possible pour réduire la quantité de phosphore et d'azote contenue dans le lisier. Une façon de réduire ces rejets est d'agir sur l'alimentation. Nous utilisons une approche tricritère, la méthode des ε -contraintes, afin d'obtenir un spectre

des solutions possibles permettant de réduire les rejets. Cette approche permet de tracer la surface des courbes de niveaux et nous pouvons ainsi proposer un graphique facilitant la lecture des résultats. Chaque utilisateur pourra alors déterminer le coût d’une alimentation correspondant à ses critères sur les rejets environnementaux. Nous avons appliqué cette méthode sur les modèles d’alimentation par mélange et sur la nouvelle modélisation hybride.

La partie principale de ce manuscrit porte sur l’optimisation globale du problème bilinéaire, et donc non convexe, modélisant l’alimentation par mélanges. La bilinéarité apparaît dans ce modèle tant dans la fonction objectif que dans les contraintes ce qui nous empêche de le traiter comme un problème de minimisation d’une fonction concave. Nous ne pouvons donc pas utiliser les méthodes de type SLP (sequential linear programming). Ce problème peut posséder plusieurs minima, mais nous souhaitons en obtenir un minimum global. Ce problème est équivalent à un problème de pooling et nous montrons que c’est un problème fortement NP-difficile. Après une analyse de premiers résultats, nous énonçons la conjecture que tout minimum local est un minimum global pour ce problème bilinéaire appliqué à l’industrie porcine. Nous prouvons cette conjecture sur des exemples de dimension réduite. Étant donné que notre problème ne peut pas être résolu avec des solveurs globaux à cause de sa dimension, nous appliquons alors des méthodes de relaxation telle que la pénalisation des termes bilinéaires, leur discrétisation, ou encore des techniques classiques de relaxation lagrangienne ou convexe. Toutes les approches que nous présentons supportent notre conjecture.

Enfin, nous réalisons une étude de la robustesse des solutions à la variation des prix des matières premières. En utilisant une méthode de minimisation en pire cas, nous montrons qu’utiliser le prix moyen des ingrédients sur une année donne une bonne estimation du coût moyen de l’alimentation tout au long de l’année. Enfin, l’optimisation biniveau nous permet de déterminer le contexte de prix le plus et le moins favorable à la mise en place d’une alimentation par mélanges, c’est-à-dire quand la différence de coût entre l’alimentation traditionnelle et l’alimentation par mélanges est la plus grande et la plus petite respectivement.

Nous terminons ce manuscrit par la présentation du fonctionnement de l’alimentation de précision. De manière générale, l’aliment est apporté collectivement aux porcs, mais les be-

soins peuvent différer d'un animal à l'autre. L'alimentation de précision permet d'apporter l'aliment de manière individualisée au porc en fonction de ses besoins. Nous présentons alors le mode de fonctionnement d'une porcherie puis le modèle mathématique permettant de déterminer l'alimentation à moindre coût pour tout un troupeau ainsi que les résultats utilisant une alimentation par mélanges. La réduction moyenne du coût de l'alimentation pour des troupeau ayant une taille de 5 à 55 animaux est de 10.03%. Nous montrons également que les quantités de phosphore et d'azote ingérées sont réduites. Ce chapitre n'est qu'une étude préliminaire et sera approfondi lors de futures recherches.

Mots clés : Modèles mathématiques, programmation non linéaire, optimisation globale, problème bilinéaire, relaxation convexe, problème de diète.

ABSTRACT

This thesis deals with the development and the study of new models representing the feeding system of growing-finishing pigs. There are two main goals. A practical objective and a theoretical objective, a practical one and a theoretical one. The practical aim consists in developing new feed formulation that reduces feed costs and that consider environmental excretion. The theoretical aim consists in a study of a bilinear diet problem applied in the pig industry to get numerical and theoretical results.

Today, feed represents more than 70% of the production cost in growing-finishing pig industry. In the current economic context, it is important to reduce it. The feeding system currently used in the industry is a phase feeding system, modeled in a linear program. The feeding system using feeds introduced recently is modeled by a bilinear program and leads to a feed cost reduction of 4%. We introduce here a new feeding system which is a combination of the traditional feeding system using phases and the feeding system using feeds. We call it the hybrid feeding system. We show that use this feeding system leads to a feed cost reduction of more than 5%. As the pig industry is frequently cited as a major polluting activity, in particular because of the high level of phosphates and nitrates in the manure spreading, we must do our best to reduce the phosphorus and nitrogen excretion. One way to reduce them is to act on the feed. We use a tricriteria approach, the ϵ -constraints method, to get a spectrum of feasible solutions that reduce excretion. Using this approach, we can plot contour lines and thus have a graph facilitating the results reading. Every user can then determine the feed cost that corresponds to the wanted excretion. We applied this method on the feeding system using feeds and the hybrid feeding system.

The main part of this manuscript focuses on the global optimization, and then non-convex, that model the feeding system using feeds. The bilinearity appears in the objective function and in the constraints, which prevent to take it as the minimization of a concave objective function. Thus we cannot use SLP (sequential linear programming) methods. This problem can have several minima, but we want to find a global one. It can be seen as a pooling problem and we show that it is a strongly NP-hard problem. After a study of preliminary results, we state the conjecture that any local minimum is a global minimum for the considered instances of the diet problem applied in the pig industry. We prove this conjecture for a small size problem. As our problem cannot be solved by global solvers because of its size, we apply relaxation methods such as penalization of bilinear terms, discretizations, or classical relaxation technic (Lagrangian or convex). All these approaches support our conjecture.

In the next part we do a robustness study of the solution to the price raw materials. Using a worst case minimization method, we show that use the mean cost of the ingredient over a year is a good estimate of the mean cost of the feed all over the year. At last, using bilevel optimization, we determine the best price scenario, the one maximize the feed cost reduction, and the worst-case scenario, the one minimizing the feed cost reduction, between the feeding system using feeds and the traditional feeding system.

Finally, we conclude this manuscript with the presentation of the precision feeding system. In a general manner, the feed is brought collectively to the pigs, even if the nutritional requirements of each pig is different. The precision feeding system brings the feed individually to each pig depending of its requirements. In this chapter, we present how works a pigsty and the mathematical model to determine least cost feed for the herd and the results of the feeding system using feeds. The mean reduction cost for herds having a size from 5 to 55 pigs is 10.03%. We also show that the amount of phosphorus and nitrogen intake can be considerably reduced. This chapter is a preliminary study and will be deepened later.

Keywords : Modelling, non linear programming, global optimization, bilinear problem, convex relaxation, diet problem.

REMERCIEMENTS

Pour commencer, je tiens à remercier mes directeurs de thèse, **François, Jean-Pierre** et **Mounir**. Un grand merci à tous les trois pour m'avoir transmis vos connaissances, pour toute l'aide que vous m'avez apportée, pour votre disponibilité et pour m'avoir guidée et soutenue tout au long de cette thèse. Vous êtes entrés dans ma vie il y a sept ans et je ne vous remercierai jamais assez pour cela, je vous concidère comme mes anges gardiens. J'ai énormément appris à vos côtés et c'est grâce à vous que je suis qui je suis aujourd'hui.

Mes remerciements vont à **Charles Audet** et **François Clautiaux** qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce manuscrit, ainsi qu'à **Paul Armand, Amélie Lambert** et **Abdel Lisser** pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien de **Candido** qui est à l'origine de l'idée, et sans qui cette thèse n'existerait pas. Je remercie également **Swine Innovation Porc**, le **Consulat général de France à Québec**, et le **Centre Henri Lebesgue**, qui m'ont permis, grâce aux diverses aides financières, de me consacrer sereinement à l'élaboration de ma thèse.

Faire une thèse c'est bien. Faire une thèse en cotutelle, c'est mieux... Sauf d'un point de vue administratif. Je tiens donc à remercier **Lise** et **Aurore**, pour les heures passées avec moi, au téléphone, ou à rédiger des mails, afin de régler toutes les difficultés administratives que j'ai pu rencontrer.

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe IRMAR-INSA Rennes, et plus spécialement futur

Dr Drey, et mon petit frère **Tanj**, pour tous les moments que nous avons passés ensemble, bons comme mauvais. Heureusement, il y en a plus de bons que de mauvais.

Je remercie également tous le **BISOUS**, en particulier **Grosfasol**, même s'il n'a pas d'âme et je ne suis donc pas sûre qu'il le mérite, **Grosgâteau**, pour m'avoir fait perdre mon temps à faire des Rubik's cubes et des quizz au Montagu, **Grosjojo** pour m'avoir inspiré à faire ce que je veux où je veux, et enfin mon petit **S.A.M.**, dont la signification restera secrète, mon stagiaire préféré pour toujours, qui m'a permis d'avoir le statut de première conseillère cœur et avec qui j'ai passé des centaines d'heures à résoudre les célèbres mots croisés de Michel.

J'ai passé d'excellents moments au Québec, où j'ai passé la moitié de ma thèse, et je remercie toutes les personnes que j'ai connues là-bas, notamment **Emilie** et **Thibaut** pour tous les moments que nous avons passés ensemble, de m'avoir accueilli pendant plusieurs mois chez vous, **Alexis**, mon petit ours canadien, pour m'avoir nourri à de nombreuses reprises "Chez Rima" et à "J'aime ta fraise", **Lili**, **Marine**, **Ingrid** et **Marion** pour tous les merveilleux moments passés au Chalet, et enfin **Max** pour ceux passés à La Macaza, ce qui m'a permis de décompresser régulièrement.

Je tiens également à remercier **Chris**, **Barbie** et **Gaby**, **Alex**, **Giorgio** et **Mozzarella**, **Clairette**, **Cindy**, **Jérôme** ainsi que **Max** et **Fanny** pour toutes les soirées et week-ends que nous avons passés ensemble durant toutes ces années. Des remerciements particuliers vont à **Alice**, pour m'avoir accompagnée à faire du sport pendant deux ans, à **Kiwi**, juste parce que c'est Kiwi et à **Cécile** et **Fabian**, pour le temps passé sur Skype, tous les merveilleux moments que nous avons passés depuis 30 ans et bien sûr pour l'inoubliable EVJF organisé avec Elo. Un grand merci justement à ma copine **Elo**, **Thibaud** et **Doudou** pour m'avoir supporté non-stop pendant 4 mois, pour tous ces moments passés ensembles à rire, chanter, jouer, blaguer,... et je vous promets que je ferai une super marraine pour **Litchi**.

Je remercie également toute ma famille et plus particulièrement mes parents, **Annie** et **Pierre**, pour leur soutien tout au long de ma scolarité (promis, c'est fini maintenant), mon frère et ma belle-sœur, **Stéf** et **Alex**, ma sœur et mon beau-frère, **Céline** et **Tom**, pour le

bonheur qu'ils m'ont apporté en me faisant tata d'**Alexandre** et **Yuna**.

Merci également à mes relectrices et relecteurs, que j'ai déjà cités et qui se reconnaîtront.

Enfin, je finis par le meilleur. Merci à mon petit chat, **Euclide**, de m'avoir tenu compagnie à Rennes et mille mercis à mon mari, **Damien**, pour m'avoir encouragée et supportée pendant 12 ans et plus particulièrement durant toute cette thèse. Merci pour tout le bonheur et l'amour que tu m'apportes quotidiennement, de m'avoir remonté le moral pendant les moments difficiles, même lorsque nous étions séparés par 6 000 km. Merci pour tous les sacrifices que tu as faits pour que notre avenir soit meilleur. Nous pouvons maintenant en profiter.

Émilie Joannopoulos

Rennes, Juin 2018

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	vi
REMERCIEMENTS	viii
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xvii
LISTE DES FIGURES	xix
LISTE DES ABRÉVIATIONS	xxi
NOTATION	xxii
INDEX DES MODÈLES	xxv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Le modèle de diète dans l’industrie porcine	8

1.1	Données utilisées	9
1.2	Modélisation	10
1.2.1	Modélisation du coût d'alimentation	11
1.2.2	Contraintes de composition	12
1.2.3	Contraintes des nutriments	13
1.2.4	Contraintes d'énergie	14
1.2.5	Contraintes d'ingestion	14
1.3	Les différentes formulations	15
1.3.1	La formulation traditionnelle	15
1.3.2	La formulation multiphase	17
1.3.3	L'alimentation idéale	18
1.3.4	La formulation par mélanges	19
1.4	Une nouvelle formulation hybride	21
1.4.1	Modélisation mathématique	22
1.4.2	Résultats numériques	23
1.5	Hierarchie des modèles	25
CHAPITRE 2 — Optimisation globale du modèle bilinéaire		30
2.1	Mise en contexte	32
2.1.1	Introduction au problème	32
2.1.2	Instances considérées	33
2.1.3	Le modèle idéal : une borne inférieure	35

2.1.4	Formulation sous forme d'un problème de pooling	35
2.1.5	Complexité du problème	40
2.2	Analyse des solutions obtenues	43
2.2.1	Conjecture	43
2.2.2	Problèmes géométriques	44
2.2.3	Analyse d'un exemple de dimension réduite	46
2.2.4	Le problème de réalisabilité	51
2.2.5	Résolution avec des solveurs globaux	52
2.2.6	Résolution du modèle "pooling"	53
CHAPITRE 3 — Analyse par relaxation		56
3.1	Approche par pénalisation	56
3.2	Approche par discrétisation	58
3.2.1	Vers un problème linéaire mixte en nombres entiers	58
3.2.2	Relaxation continue du MILP	62
3.3	Relaxation lagrangienne	62
3.3.1	Algorithme du sous-gradient	63
3.3.2	Relaxation lagrangienne du MILP	64
3.3.3	Relaxation lagrangienne du problème bilinéaire	64
3.4	Relaxations convexes	65
3.4.1	Relaxation convexe de McCormick	66
3.4.2	Relaxation convexe de Tawarmalani <i>et al.</i>	75

3.4.3	Illustrations des relaxations de McCormick et Tawarmalani	81
3.4.4	Une relaxation semi-définie positive	83
CHAPITRE 4 — Extension des modèles bilinéaires		93
4.1	Approche intégrant les rejets environnementaux	93
4.1.1	L'approche multicritère	94
4.1.2	La modélisation ε -contraintes	96
4.1.3	Résultats numériques	97
4.1.3.1	Application à l'alimentation par mélanges	97
4.1.3.2	Application à l'alimentation hybride	100
4.2	Optimisation robuste	104
4.2.1	Optimisation du pire mois	105
4.2.1.1	Observation de l'impact du prix des ingrédients sur le coût de l'alimentation	105
4.2.1.2	Détermination de la solution en pire cas	107
4.2.2	Optimisation biniveau	108
CHAPITRE 5 — Perspectives : modélisation pour un troupeau		112
5.1	Fonctionnement d'une porcherie	113
5.2	Modélisation de l'alimentation d'un troupeau	113
5.3	Données utilisées	114
5.4	Résultats numériques	117
CONCLUSION ET PERSPECTIVES		121

Formations complémentaires et participations aux conférences	124
Annexe A — Optimisation des Coûts d’Alimentation et des Rejets chez le Porc Charcutier	127
Annexe B — Nouvelle méthode d’alimentation hybride : un mixte de l’alimentation traditionnelle par phases et par mélanges	130
Annexe C — Une nouvelle méthode de formulation pour réduire coûts et rejets	137
Annexe D — New free energy density feeding systems : feed cost and phosphorus and nitrogen excretions study	140
Annexe E — Saving costs and the environment by mixing pig diets	154
Annexe F — Low cost diets with low excretions levels - it is possible	157
Annexe G — A bilinear model with applications in the feed industry and its global solution analysis	161
Annexe H — Codes AMPL des méthodes 1MF et p HF	183
H.1 Méthode 1MF	183
H.1.1 Fichier modèle : <code>dmf.mod</code>	183
H.1.2 Fichier commandes : <code>dmf.run</code>	185
H.2 Méthode p HF	186
H.2.1 Fichier modèle : <code>hfp.mod</code>	186
H.2.2 Fichier commandes : <code>hfp.run</code>	186

LISTE DES TABLEAUX

1	Diète annuelle à coût minimal en août 1939.	3
1.1	Liste, prix et incorporation maximale dans les mélanges des ingrédients utilisés lors des simulations.	13
1.2	Comparaison des méthodes d'alimentation <i>MC-p</i> HF-EL, pour $p=1$ à $p=4$, avec l'alimentation traditionnelle et l'alimentation idéale, appliquée aux don- nées de 2011 et 2016.	24
2.1	Comparaison de la valeur optimale de solveurs globaux (Couenne, BARON) avec un solveur non linéaire (Ipopt).	53
3.1	Valeurs optimales du problème pénalisé et du problème initial, distance à la solution locale x_{ipopt}^* et distance à l'ensemble réalisable du problème initial ($d(x^*, S) = \ \max(0, \tilde{g}(x, y, z))\ $).	57
3.2	Valeur optimale du problème bilinéaire solveur Ipopt) et du modèle discrétisé (solveur CPLEX) ainsi que le temps CPU (en seconde).	61
3.3	Résumé des différents résultats de relaxation lagrangienne.	65
4.1	Résumé des points présentés dans les figures 4.3 et 4.4.	102
4.2	Coût de l'alimentation en fonction du contexte de prix.	105

4.3	Coût de l'alimentation en fonction du contexte de prix en considérant la solution robuste.	108
4.4	Résultats des problèmes biniveaux déterminant le contexte de prix le plus et le moins favorable à la mise en place d'une alimentation MC-1MF-EL. . . .	110
5.1	Valeur optimale, P excrété et N excrété des différentes alimentations avec les prix de 2011 et comparaison MC-1MF-EL et MC-IF-EL avec MC-3PF-EF. .	118
5.2	Valeur optimale, P excrété et N excrété des différentes alimentations avec les prix de 2016 et comparaison MC-1MF-EL et MC-IF-EL avec MC-3PF-EF. .	119

LISTE DES FIGURES

1	Répartition de la production porcine dans le monde.	1
1.1	Évolution du poids de l'animal moyen considéré.	10
1.2	Évolution du besoin quotidien en énergie nette.	10
1.3	Évolution du besoin quotidien en différents acides aminés.	11
1.4	Évolution du besoin quotidien en acides aminés non essentiels.	12
1.5	Évolution de la consommation maximale autorisée pour l'animal moyen considéré.	12
1.6	Illustration du fonctionnement de l'alimentation traditionnelle.	16
1.7	Illustration de l'alimentation idéale.	18
1.8	Illustration du fonctionnement de l'alimentation par mélanges.	19
1.9	Illustration de l'alimentation hybride.	22
2.1	Graphe représentant un problème de pooling.	36
2.2	Graphe représentant le problème de diète porcine sous la forme d'un problème de pooling.	39
3.1	Représentation graphique de l'enveloppe de McCormick pour un terme bilinéaire.	66

3.2	Illustration de la surface bilinéaire $B = \{(x, y, z) \in [0, 5]^3 xy + z \geq 4\}$	81
3.3	Illustration de la surface bilinéaire B et de sa relaxation de McCormick B_M	82
3.4	Illustration de la surface bilinéaire B et de son enveloppe convexe B_T	83
3.5	Illustration de la surface bilinéaire B et les relaxations de Tawarmalani <i>et al.</i> B_T et McCormick B_M	84
3.6	Exemple tel que la relaxation de McCormick est incluse dans la relaxation de Tawarmalani.	85
4.1	Ensemble des solutions du modèle TC-1MF-EL appliqué aux données de 2011.	98
4.2	Ensemble des solutions du modèle TC-1MF-EL appliqué aux données de 2016	99
4.3	Ensemble des solutions du modèle TC-3HF-EL appliqué aux données de 2011.	101
4.4	Ensemble des solutions du modèle TC-3HF-EL appliqué aux données de 2016	103
4.5	Répartition des coûts en fonction des alimentations.	106
5.1	Fonctionnement d'une porcherie appliquant l'alimentation de précision.	113
5.2	Quantité d'aliment ingéré quotidiennement par le porc n°6 (données brutes).	115
5.3	Poids vif hebdomadaire du porc n°6 (données brutes).	115
5.4	Quantité d'aliment ingéré quotidiennement par le porc n°6 (données lissées).	115
5.5	Quantité de protéine dans le corps du porc n°6 (données brutes).	115
5.6	1 ^{er} groupe d'animaux dont la croissance est semblable.	116
5.7	2 nd groupe d'animaux dont la croissance est semblable.	116
5.8	3 ^e groupe d'animaux dont la croissance est semblable.	116
5.9	4 ^e et 5 ^e groupe d'animaux.	116

LISTE DES ABRÉVIATIONS

P	Phosphore
N	Azote
MC	Monocritère
TC	Tricritères
<i>p</i>PF	Méthode d'alimentation à p phases (p phase feeding system)
IF	Méthode d'alimentation idéale (ideal feeding system)
1MF	Méthode d'alimentation par prémélanges (daily mixed feeding system)
<i>p</i>HF	Méthode d'alimentation hybride à p phases (hybrid feeding system with p phases)
EF	Energie fixe
EL	Energie libre
MILP	Mixed Integer Linear Programming (problème linéaire mixte en nombre entier)
SDP	Semi-définie positive

NOTATION

Nous introduisons ici les notations qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

Quatre ensembles d'indices sont utilisés :

- I est l'ensemble des ingrédients utilisés pour la réalisation des aliments (par exemple : blé, orge, tourteaux ...) dont les éléments sont notés i , et dont la cardinalité est $|I|$,
- J est l'ensemble des jours ou phases représentant la période de croissance des porcs dont les éléments sont notés j , et dont la cardinalité est $|J|$,
- N est l'ensemble des nutriments (par exemple : lysine, calcium, phosphore...) dont les éléments sont notés n , et dont la cardinalité est $|N|$,
- A est l'ensemble des aliments, ou mélanges, utilisés lors de l'alimentation, de cardinalité $|A|$.

À partir de ces ensembles, définissons les données suivantes :

- m_E est l'apport en énergie des ingrédients (vecteur de taille $|I|$), dont l'élément m_{Ei} représente l'apport en énergie de l'ingrédient i , pour tout $i \in I$,
- M_N est l'apport en nutriment des ingrédients (matrice de taille $|I| \times |N|$) , dont l'élément m_{ni} représente l'apport en nutriment n de l'ingrédient i , pour tout $n \in N$ et pour tout $i \in I$. Le vecteur ligne représentant l'apport en nutriment n de chaque ingrédient sera noté m_n ,
- e est le besoin en énergie pour toute la période de croissance (vecteur de taille $|J|$), dont l'élément e_j représente le besoin en énergie au jour j , pour tout $j \in J$,

- \overline{B} est l'apport maximum autorisé en nutriments pour toute la période de croissance (matrice de taille $|N| \times |J|$), dont l'élément \overline{b}_{nj} représente l'apport maximal autorisé du nutriment n au jour j , pour tout $n \in N$ et pour tout $j \in J$,
- \underline{B} est le besoin en nutriments pour toute la période de croissance (matrice de taille $|N| \times |J|$), dont l'élément \underline{b}_{nj} représente le besoin du nutriment n au jour j , pour tout $n \in N$ et pour tout $j \in J$,
- W^{\max} est la capacité d'ingestion (vecteur de taille $|J|$), dont l'élément w_j^{\max} représente la quantité maximale d'aliments que le porc peut ingérer au jour j , pour tout $j \in J$,
- x^{\max} est le vecteur de restriction (vecteur de taille $|I|$), dont l'élément x_i^{\max} représente la proportion maximale de l'ingrédient i dans les mélanges,
- c est le vecteur prix (vecteur de taille $|I|$), dont l'élément c_i représente le prix de l'ingrédient i , pour tout $i \in I$,
- R_P est la quantité de phosphore retenue par l'animal (vecteur de taille $|J|$), dont l'élément R_{Pj} représente la quantité de P retenue au jour j ,
- R_N est la quantité d'azote retenue par l'animal (vecteur de taille $|J|$), dont l'élément R_{Nj} représente la quantité de N retenue au jour j .

Les variables sont introduites de la manière suivante :

- X est la matrice des aliments, ou diète, de taille $|I| \times |A|$, dont l'élément x_{ia} représente la quantité de l'ingrédient i dans l'aliment a , pour tout $i \in I$ et pour tout $a \in A$. L'aliment a sera un vecteur colonne, noté x_a ,
- Q est la matrice des quantités d'aliments, de taille $|J| \times |A|$, dont l'élément q_{ja} représente la quantité de mélange a donnée à l'animal au jour j , pour tout $j \in J$ et pour tout $a \in A$.

Tout au long de ce document, nous allons étudier différentes techniques d'alimentation.

Dans un premier temps, nous allons introduire la notion de *phase*. Une phase est un intervalle de temps durant lequel les animaux sont nourris avec un même mélange.

Nous allons maintenant définir une notation pour les différents modèles que nous allons présenter. Celle-ci sera de la forme $XX - YYY - ZZ$, où

- XX représente le nombre d'objectifs du modèle et prendra la valeur MC si le modèle considéré est monocritère, c'est-à-dire qu'il ne minimise que le coût de l'alimentation, ou TC s'il est tricitére, c'est-à-dire minimisant le coût de l'alimentation et les rejets de phosphore et d'azote ;
- YYY représente la méthode d'alimentation et peut prendre les valeurs suivantes :
 - pPF pour une alimentation à p phases (p Phases Feeding system),
 - $1MF$ pour une alimentation par mélange (1 phase Mixed Feeding system),
 - pMF pour une alimentation avec prémélanges à p phases (p phases Mixed Feeding system),
 - pHF pour une alimentation hybride à p phases (Hybrid Feeding system with p phases),
 - IF pour une alimentation idéale (Ideal Feeding) ;
- ZZ représente la méthode de modélisation de l'énergie et prendra la valeur EF si la densité énergétique est fixe et EL si la densité énergétique est libre.

INDEX DES MODÈLES

Le modèle traditionnel

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \sum_{j \in J} c^t(q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2} + q_{j3}x_{.3}) \\ \text{s.à} & q_{j1}x_{.1} \in S_j, \quad j \in J_1, \\ & q_{j2}x_{.2} \in S_j, \quad j \in J_2, \\ & q_{j3}x_{.3} \in S_j, \quad j \in J_3, \end{array} \right. \quad (\text{MC-3PF-EF})$$

avec

$$S_j = \left\{ y_a = q_{ja}x_{.a} \left| \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_n y_a \leq \bar{b}_{nj}, & \forall n \in N, \\ m_E y_a = e_j, & \\ \sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{\max}, & \\ q_{ja} \geq 0, & \forall a \in A, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, & \forall a \in A, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1, & \forall a \in A. \end{array} \right. \right\}.$$

Le modèle idéal

$$\begin{cases} \min_X & \sum_{a \in A} \sum_{j \in J} q_{ja} (c^t x_{\cdot j}) \\ \text{s.à} & q_{ja} x_{\cdot a} \in S_j, \quad \forall j \in J, \end{cases} \quad (\text{MC-IF-EL})$$

avec

$$S_j = \left\{ y_a = q_{ja} x_{\cdot a} \left| \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_{n\cdot} y_a \leq \bar{b}_{nj}, & \forall n \in N, \\ m_E y_a = e_j, & \\ \sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{\max}, & \\ q_{ja} \geq 0, & \forall a \in A, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, & \forall a \in A, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1, & \forall a \in A. \end{array} \right. \right\}.$$

Le modèle par mélanges

$$\begin{cases} \min_{X, Q} & \sum_{j \in J} c^t (q_{j1} x_{\cdot 1} + q_{j2} x_{\cdot 2}) \\ \text{s.à} & (q_{j1} x_{\cdot 1} + q_{j2} x_{\cdot 2}) \in S_j, \quad \forall j \in J, \end{cases} \quad (\text{MC-1MF-EL})$$

avec

$$S_j = \left\{ y = q_{j1} x_{\cdot 1} + q_{j2} x_{\cdot 2} \left| \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_{n\cdot} y \leq \bar{b}_{nj}, & \forall n \in N, \\ m_E y = e_j, & \\ q_{j1} + q_{j2} \leq W_j^{\max}, & \\ q_{ja} \geq 0, & \forall a \in \{1, 2\}, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, & \forall a \in \{1, 2\}, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1, & \forall a \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \right\}.$$

Le modèle hybride

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} \sum_{a \in \{1, \dots, p\}} q_{ja} c^t x_a \\ \text{s.à} & \sum_{a \in \{1, \dots, p\}} q_{ja} x_a \in S_j, \quad \forall j \in J, \\ & q_{j1} = 0, \quad \forall j \notin J_1, \\ & q_{jk} = 0, \quad \forall j \notin J_{k-1} \cup J_k, \forall k \in \{2, \dots, p\}, \\ & q_{j,p+1} = 0, \quad \forall j \notin J_p, \end{array} \right. \quad (MC\text{-}p\text{HF-EL})$$

avec

$$S_j = \left\{ y = \sum_{a \in \{1, \dots, p\}} q_{ja} c^t x_a \left| \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_n \cdot y \leq \bar{b}_{nj}, & \forall n \in N, \\ m_E y = e_j, \\ \sum_{a \in \{1, \dots, p\}} q_{ja} \leq W_j^{\max}, \\ q_{ja} \geq 0, & \forall a \in \{1, \dots, p\}, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, & \forall a \in \{1, \dots, p\}, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1, & \forall a \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right. \right\}.$$

INTRODUCTION

Chaque année, ce sont plus de 109 millions de tonnes de viande de porc qui sont consommées dans le monde.

En France comme au Canada, l'industrie porcine est une activité économique importante puisque ces deux pays sont parmi les 10 plus gros producteurs de porcs. Cette activité représente une part importante de la production agricole de chaque pays avec 5% et 10% respectivement.

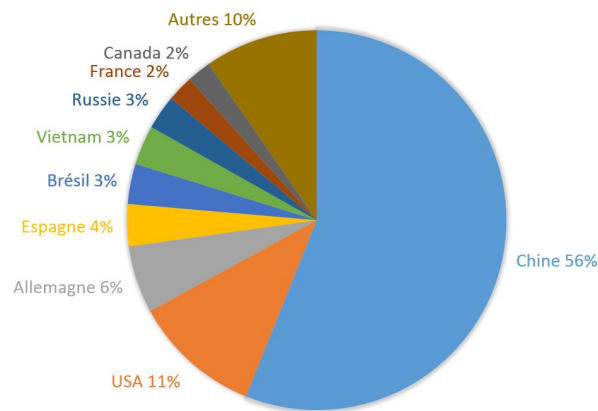


Figure 1 – Répartition de la production porcine dans le monde.

En France, on élève et abat 24 millions de porcs annuellement, ce qui en fait le troisième producteur européen, derrière l'Allemagne et l'Espagne, et le huitième producteur mondial. La Bretagne est la région produisant le plus de porcs en France avec près de 60% du cheptel français.

En comparaison, le Canada produit environ 21 millions de porcs annuellement et est le

troisième producteur américain, derrière les États-Unis et le Brésil. C'est également le neuvième producteur mondial. Près de 8 millions de porcs sont élevés et abattus au Québec, soit environ 38% de la production canadienne, ce qui en fait également la province la plus productrice.

Ces deux pays et régions sont des producteurs porcins comparables. C'est en partie ce qui nous a encouragés à réaliser cette thèse en cotutelle entre l'Université de Sherbrooke, au Canada, et l'INSA de Rennes, en France.

Toutefois, la principale motivation de cette thèse est avant tout économique et environnementale. En effet, l'alimentation représente 70% du coût total de production dans un élevage de porc à l'engraissement et, dans le contexte économique actuel, il est essentiel de parvenir à réduire autant que possible ce coût de production. D'autre part, l'industrie porcine est fréquemment citée comme étant un agent polluant, notamment par l'apport massif de phosphate et nitrate lors de l'épandage de lisier. Il est donc également important de réduire cette cause de pollution. Une manière de parvenir à ces résultats est d'agir sur les méthodes d'alimentation. Nous allons modéliser mathématiquement l'alimentation des porcs en croissance-finition et nous allons chercher à en minimiser le coût tout en intégrant des contraintes sur les rejets de phosphore et d'azote.

La modélisation de diète fut introduite en 1945 par l'économiste américain George Stigler [95]. Il se posa la question :

"Pour un homme pesant 70kg et ayant une activité modérée, quelle quantité de chacun des 77 ingrédients doit être mangée sur une base quotidienne afin que l'apport des neuf nutriments ingérés soit supérieur ou égal à la quantité journalière recommandée, et ce à coût minimal ?"

Selon ses résultats, en 1939, un homme moyen aurait été capable de se nourrir annuellement avec uniquement 39.93 \$US, soit 0.11 \$US par jour. Les ingrédients de cette alimentation sont donnés au tableau 1.

Ingrédient	Quantité
Farine de blé	370 lb
Lait concentré	57 boîtes
Chou	111 lb
Épinards	23 lb
Haricots secs	285 lb

Tableau 1 – Diète annuelle à coût minimal en août 1939.

Cette alimentation a été largement ridiculisée du fait de son manque de variété dans l'alimentation. En fait, on conviendra que personne ne doit se nourrir de cette manière. Cependant, cet exemple est considéré comme l'un des premiers travaux en programmation linéaire.

Notons :

- I : l'ensemble des ingrédients ;
- N : l'ensemble des nutriments ;
- A : la matrice d'apport en nutriment des ingrédients ;
- c : le vecteur prix des ingrédients ;
- b : le vecteur des besoins en nutriments.

Le problème de diète présenté par Stigler s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_x & c^t x \\ \text{sujet à} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array} \right.$$

Les méthodes modernes de résolution de problèmes linéaires n'étant pas connues à cette époque-là, Stigler eut recours à des heuristiques pour déterminer la solution à son problème.

En 1947, Dantzig développa l'algorithme du simplexe, ce qui fut une révolution dans la programmation linéaire. Il a été prouvé que, si le problème linéaire admet une solution bornée, alors cette solution est atteinte sur un sommet du polyèdre de l'ensemble des solutions réalisables. L'idée générale de l'algorithme du simplexe est simple. À chaque itération, on passe d'un sommet à un de ses sommets adjacents, reliés entre eux par des arêtes, de manière à ce que la fonction objectif décroisse, dans le cas de la minimisation. Si la direction déterminée ne contient pas de sommets, alors le problème est non borné inférieurement.

Dans [29], Dantzig raconte l'histoire du problème de diète. En 1947, il entreprit de tester son algorithme sur le problème de Stigler. Ce fut alors le premier calcul "de grande dimension". Résoudre ce problème de 9 équations et 77 variables prit environ 120 jours. Ils découvrirent alors que la vraie solution de ce modèle a en réalité un coût de 39.69 \$US, soit 0.24 \$US de moins que ce qu'avait déterminé Stigler, ce qui n'est pas trop mauvais pour des heuristiques.

Quelques années plus tard, début 1990, Lancaster [62, 61] a étudié les différentes évolutions du modèle classique de diète avec différentes formulations comme la formulation non linéaire ou encore stochastique. Cependant, c'est la programmation linéaire qui est la plus répandue dans la modélisation de diète.

En 2001, Garille et Gass [45] ont revisité le problème de diète de Stigler. Une illustration de l'inflation des prix a été fournie. En utilisant la diète déterminée par Stigler, mais avec le prix des ingrédients en 1998, le coût de la diète passe de 39.93 \$US à 469.35 \$US. La principale contribution a été de rajouter des bornes supérieures à certains ingrédients et aux apports de certains nutriments qui sont en adéquation avec "l'apport journalier recommandé" par les nutritionnistes.

Finalement, le modèle de diète qui est le plus répandu actuellement peut être représenté par le modèle linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_x & c^t x \\ \text{sujet à} & \underline{b} \leq Ax \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq x \leq x^{\max}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Plus particulièrement pour l'industrie porcine, l'étude de ces modèles a été réalisée afin de réduire les coûts d'alimentation [14, 54]. Les modèles utilisés dans ces études sont linéaires et correspondent à (1). La notion de phase, que nous expliquerons en détail dans le chapitre 1, a été introduite et a permis de réduire les coûts d'alimentation. Aujourd'hui, l'industrie porcine utilise en général deux ou trois phases d'alimentation.

Par la suite, des études concernant l'impact environnemental de telles diètes ont été réalisées [15, 55, 79, 78]. Il a également été montré [32, 33] que lorsqu'on cherche à minimiser les rejets

en plus du coût de l'alimentation, c'est-à-dire qu'on utilise des modèles multiobjectifs, il est possible de réduire considérablement les rejets moyennant une faible augmentation des coûts d'alimentation. Les études théoriques précédentes ont été appliquées lors d'études expérimentales [22, 101, 100, 64] et correspondent à ce qui a été relevé sur le terrain. Finalement, une modélisation novatrice de l'alimentation permettant de réaliser une forte réduction des coûts a été présentée plus récemment [56, 57]. Cette alimentation est modélisée par un modèle bilinéaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x, y) \\ \text{s.à} & g_i(x, y) \leq 0 \quad \forall i \in I \\ & h_j(x, y) \leq 0 \quad \forall j \in J \end{array} \right. \quad (2)$$

où f et g_i , pour tout $i \in I$, sont des fonctions bilinéaires, c'est-à-dire qu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, et h_j , pour tout $j \in J$ sont des fonctions linéaires.

Cette thèse a deux objectifs : un pratique et un théorique. L'objectif pratique consiste à développer de nouvelles méthodes d'alimentation chez le porc charcutier afin de réduire les coûts d'alimentation et de prendre en compte les rejets environnementaux. Dans un futur proche, ces méthodes seront mises en application et testées en centre de recherche, avant d'être instaurées dans les exploitations du Québec. L'objectif théorique consiste à une étude mathématique approfondie du modèle bilinéaire (2) appliqué à l'industrie porcine.

Ce manuscrit est divisé en 5 chapitres. Dans un premier temps (chapitre 1), nous introduirons la modélisation des différentes contraintes associées à l'élevage porcin et les données utilisées. Nous utiliserons deux bases de données, une correspondant à l'année 2011 et une correspondant à l'année 2016. Nous présenterons ensuite en détail les différentes évolutions du modèle de diète chez le porc. Nous commencerons par des modèles linéaires, avec la présentation de l'alimentation traditionnelle, multiphase et idéale, pour arriver à un modèle bilinéaire de la forme (2), représentant l'alimentation par mélanges. Nous proposons ensuite une nouvelle formulation de l'alimentation, la méthode hybride (section 1.4), qui est une combinaison des modèles d'alimentation traditionnelle et par mélanges. Toutes ces méthodes seront comparées à l'alimentation traditionnelle suivant les deux scénarios. Nous constaterons que l'alimentation par mélange permet une réduction du coût de 4.1% et 6.7%,

pour les données de 2011 et 2016 respectivement, tandis que la nouvelle méthode hybride réduit le coût de plus de 5% et plus de 7.5% respectivement. L'étude de ces modèles permet d'établir une hiérarchie sur leur valeur optimale qui sera présentée dans la section 1.5.

Le chapitre 2 sera consacré à l'optimisation globale du modèle bilinéaire. Les modèles bilinéaires sont des problèmes non convexes, pouvant avoir plusieurs minima, et très difficiles à résoudre globalement. Nous montrerons d'ailleurs que c'est un problème fortement NP-difficile. Après une analyse des solutions obtenues, nous élaborerons la conjecture que tous les minima locaux du modèle bilinéaire appliqué à l'industrie porcine sont des minima globaux. Nous prouverons que cette conjecture est vraie pour des problèmes de dimension réduite.

Notre problème ayant une trop grande dimension pour appliquer ces méthodes, nous utiliserons, dans le chapitre 3, différentes techniques de relaxation. Nous présenterons dans un premier temps des techniques de pénalisation et de discrétisation. Nous appliquerons ensuite des méthodes de relaxation lagrangienne puis de relaxations convexe (Relaxation de McCormick, relaxation de Tawarmalani *et al.*, relaxation semi-définie positive). Toutes les approches que nous présentons dans ce chapitre soutiennent notre conjecture.

Nous présenterons dans le chapitre 4 deux extensions des problèmes bilinéaires. Dans un premier temps, nous nous consacrerons à une approche intégrant les rejets environnementaux sur les modèles d'alimentation par mélanges et hybride. Nous utiliserons l'approche ε -contraintes, qui nous permet de tracer les surfaces des courbes de niveaux. Une fois ces surfaces obtenues, l'utilisateur pourra avoir une lecture simple des résultats et obtenir le coût de l'alimentation qui correspond à ses désirs en matière de rejets environnementaux. Ensuite, une étude de la robustesse de l'alimentation par mélange à la variation des prix sera proposée dans la section 4.2. Les prix de certaines matières premières étant soumis aux variations boursières, nous devons nous assurer que les méthodes que nous proposons font décroître le coût de l'alimentation, quel que soit le prix des ingrédients. Nous pouvons déduire de cette étude deux scénarios de prix, le pire, pour lequel l'écart entre le coût de l'alimentation traditionnelle et l'alimentation par mélanges est le plus petit, et le meilleur,

pour lequel il est le plus grand.

Pour finir, le chapitre 5 présentera le fonctionnement de l'alimentation de précision. De manière générale, l'aliment est apporté collectivement aux porcs. Or, les besoins peuvent différer d'un animal à l'autre. L'alimentation de précision est une technique permettant d'apporter l'aliment de manière individualisée au porc en fonction de ses besoins. Nous présenterons alors le mode de fonctionnement d'une porcherie puis le modèle mathématique permettant de déterminer l'alimentation à moindre coût pour tout un troupeau ainsi que des résultats utilisant une alimentation par mélanges. Ce dernier chapitre n'est qu'une étude préliminaire et sera approfondi lors de futures recherches.

CHAPITRE 1

Le modèle de diète dans l'industrie porcine

Ce chapitre est consacré au modèle de diète dans l'industrie porcine plus spécialement. Différentes études [14, 20, 54] ont été menées depuis le milieu des années 1990 afin de réduire le coût de l'alimentation des porcs charcutiers. Ces méthodes sont actuellement utilisées pour déterminer les aliments qui serviront à nourrir les animaux. Nous établissons ici une modélisation mathématiques des différentes formulations existantes et utilisées dans l'industrie et nous proposons également de nouvelles méthodes d'alimentation ainsi que les modèles mathématiques associés.

Nous avons séparé ce chapitre en cinq parties. Nous commencerons par présenter, dans la section 1.1 les données utilisées pour ces études. Dans la section 1.2 nous présentons progressivement la modélisation du coût de l'alimentation et les différentes contraintes d'une diète porcine que nous avons développés. Nous utiliserons ces différentes modélisations dans les sections suivantes pour plusieurs types de formulation d'alimentation. La section 1.3 présente quatre types de formulation : la formulation traditionnelle, la formulation multiphase, la formulation idéale et la formulation par mélanges. Les deux premières sont actuellement utilisées dans l'industrie tandis que la troisième est impossible à mettre en place dans les

élevages porcin. Elles ont été présentées précisément dans différentes études [32, 33]. La dernière, l'alimentation par mélanges, est en phase de test dans les centres de recherches. Nous l'avons proposée et présentée en détail dans [57, 81]. Enfin, dans la section 1.4 nous proposons une nouvelle méthode d'alimentation : la formulation hybride. C'est une combinaison de l'alimentation par phases et par mélanges. Nous montrerons que cette nouvelle méthode d'alimentation permet davantage d'économie sur le coût d'alimentation que l'alimentation par mélanges. Nous concluons ce chapitre par la section 1.5 qui présentera les relations entre les différents modèles.

1.1 Données utilisées

La suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude des différents modèles de diète développés pour l'industrie porcine. Les formulations présentées ici seront toutes appliquées aux mêmes données.

Nous considérerons un animal moyen, représentatif d'un troupeau. Il sera élevé de 20 kg à 130 kg de poids vif (figure 1.1) avec un gain moyen quotidien de 1 kg/jour. Il consomme 684 527 kcal d'énergie nette pour toute la période de croissance, soit une consommation moyenne quotidienne de 6167 kcal/jour (figure 1.2).

Les besoins en acides aminés de l'animal moyen considéré sont représentés aux figures 1.3 et 1.4.

Enfin, nous considérons dans ces études que le porc consomme jusqu'à satisfaire son besoin en énergie [34]. Nous considérons également que les animaux ont une capacité d'ingestion maximale déterminée en fonction de leur poids vif [21]. Cette capacité est représentée à la figure 1.5.

Dans les chapitres suivants, nous appliquerons différents modèles sur deux jeux de prix des ingrédients, l'un avec les prix de 2011 et l'autre plus récent, avec les prix de 2016. La liste des ingrédients ainsi que les prix enregistrés au début de chaque mois de novembre 2010 à octobre

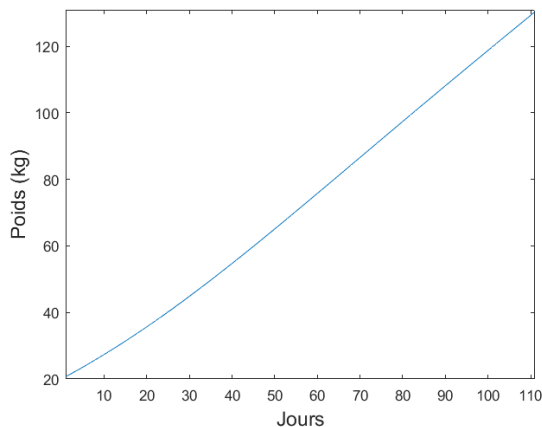


Figure 1.1 – Évolution du poids de l’animal moyen considéré.

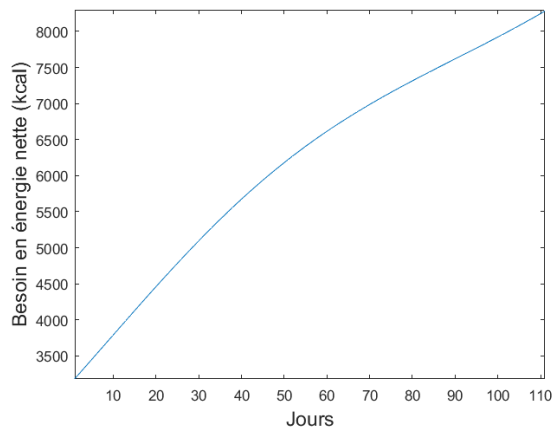


Figure 1.2 – Évolution du besoin quotidien en énergie nette.

2011 nous ont été fournis par Aliment Breton inc. (Saint Bernard, Qc, Canada), tandis que ceux de 2016 nous ont été fournis par Avimix Nutrition inc. (Lévis, QC, Canada). La liste des ingrédients, leur prix moyen dans chacun des deux scénarios, ainsi que la proportion maximale à intégrer dans les prémélanges sont disponibles dans le tableau 1.1. Dans toutes les simulations, un prémix contenant des vitamines et des traces de minéraux a été imposé à un taux fixe de 5 kg/t.

La composition nutritionnelle des ingrédients a été définie à l’aide des tables NRC (2012).

1.2 Modélisation

Dans cette section, nous proposons une modélisation mathématique du coût de l’alimentation, des contraintes de composition des aliments et des besoins des animaux. Nous utiliserons par la suite ces modélisations pour dans les différentes formulations d’alimentation.

Tout au long de cette thèse, l’ensemble des ingrédients disponible pour la formulation est donné par l’ensemble I , J sera la période de croissance des animaux, N l’ensemble des nutriments essentiels, et A l’ensemble des aliments, ou mélanges, utilisés lors de l’alimentation. Toutes les notations utilisées sont rappelées et regroupées dans la section notation page xxii.

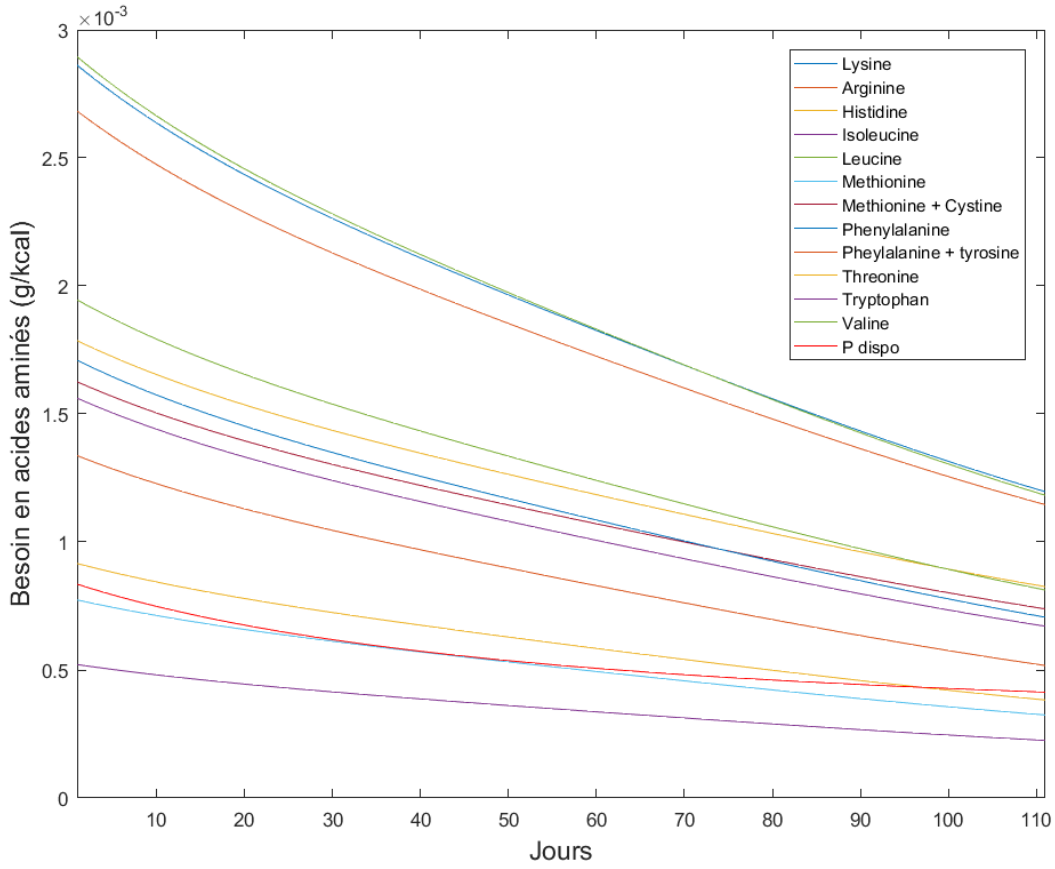


Figure 1.3 – Évolution du besoin quotidien en différents acides aminés.

1.2.1 Modélisation du coût d'alimentation

De manière générique, minimiser le coût de l'alimentation se traduit par la minimisation de la fonction objectif suivante :

$$\sum_{a \in A} \sum_{j \in J} q_{ja} (c^t x_a). \quad (1.1)$$

où q_{ja} est la quantité d'aliment a ingérée le jour j , c est le vecteur coût des ingrédients et x_a est le vecteur représentant la composition de l'aliment a .

La modélisation de l'alimentation chez le porc regroupe quatre types de contraintes qui sont liées respectivement à :

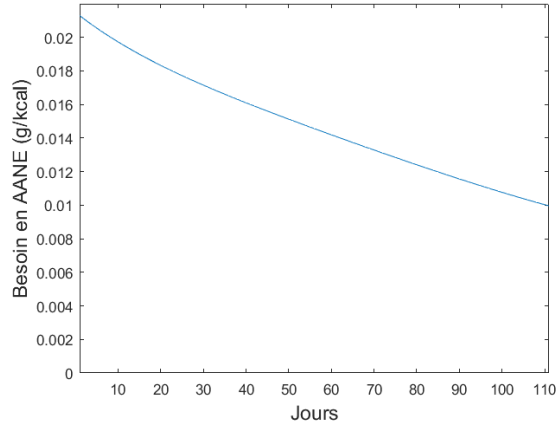


Figure 1.4 – Évolution du besoin quotidien en acides aminés non essentiels.

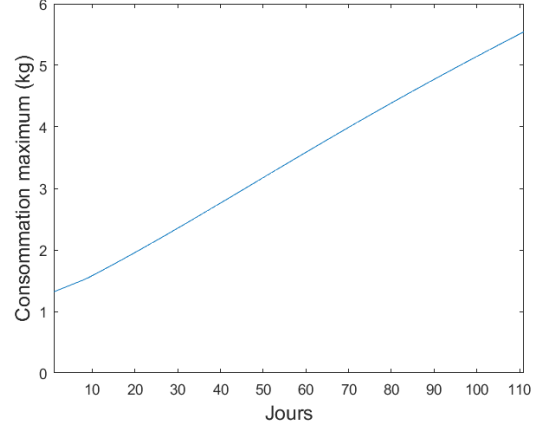


Figure 1.5 – Évolution de la consommation maximale autorisée pour l'animal moyen considéré.

- la composition des mélanges,
- l'apport en nutriments,
- l'apport en énergie,
- la capacité d'ingestion des animaux.

1.2.2 Contraintes de composition

Les contraintes liées à la composition du mélange sont uniquement présentes pour une question de fabrication de l'aliment. En effet, pour que les granulés aient de la tenue, ils doivent satisfaire certaines conditions. Par exemple, le mélange ne doit pas contenir plus de 60% de maïs ou 25% de gru de blé. Elles apparaissent en tant que contraintes de bornes sur les variables $X = (x_{ia})_{i \in I, a \in A}$ correspondant aux mélanges utilisés et sont de la forme

$$0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, \quad \forall a \in A, \forall i \in I. \quad (1.2)$$

De plus, les mélanges étant formulés en proportion, la somme de tous les ingrédients doit

Ingrédient	Prix moyen 2011 (\$/t)	Prix moyen 2016 (\$/t)	x^{\max}
Blé dur	321	225	0.4
Blé tendre	N/A	225	0.4
Carbonate de calcium	80	83	1
Chlorure de sodium	198	180	1
DL-met	5750	4800	1
Drèches	N/A	265	0.15
Farine de viande	532	505	0.03
Gras animal	1236	730	0.05
Gru de blé	242	183	0.25
L-lysine HCl	2808	1750	1
L-threo	3750	2400	1
L-trypto	57000	10000	1
Mais	320	223	0.6
Orge	288	180	0.6
Phosphate bicalcique	906	761	1
Prémix	5269	4400	0.005
Tourteau de colza	317	372	0.05
Tourteau de soja	455	558	1

Tableau 1.1 – Liste, prix et incorporation maximale dans les mélanges des ingrédients utilisés lors des simulations.

être 100%, i.e.

$$\sum_{i \in I} x_{ia} = 1, \quad \forall a \in A. \quad (1.3)$$

1.2.3 Contraintes des nutriments

Les contraintes liées à l'apport en nutriments sont des contraintes biologiques, nécessaires pour que le porc ait une croissance normale. Elle traduit le fait que l'apport en nutriment $n \in N$ de l'alimentation du jour j doit être compris entre deux bornes \underline{b}_{nj} et \bar{b}_{nj} . Elle est écrite mathématiquement sous la forme

$$\underline{b}_{nj} \leq m_n \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_{.a} \right) \leq \bar{b}_{nj}, \quad \forall n \in N, \forall j \in J, \quad (1.4)$$

où m_n correspond à l'apport en nutriment n des ingrédients de I .

D'autres types de contraintes sur les nutriments existent. En effet, le ratio calcium/phosphore

de l'aliment doit également satisfaire certaines bornes. En notant \underline{b}_{CaP} et \bar{b}_{CaP} la borne inférieure et supérieure respectivement de ce ratio, la contrainte s'écrit de la façon suivante

$$\underline{b}_{CaP,j} \leq \frac{m_{Ca} \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right)}{m_P \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right)} \leq \bar{b}_{CaP,j}, \quad \forall j \in J. \quad (1.5)$$

Cette contrainte peut être écrite en tant que deux contraintes linéaires d'inégalité qui sont

$$m_{Ca} \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right) - \underline{b}_{CaP,j} m_P \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right) \geq 0 \quad (1.6)$$

et

$$\bar{b}_{CaP,j} m_P \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right) - m_{Ca} \cdot \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right) \geq 0. \quad (1.7)$$

Par la suite, afin de simplifier la lecture du modèle, ces contraintes seront incluses dans celles définies par (1.4).

1.2.4 Contraintes d'énergie

Les contraintes liées à l'apport en énergie sont également nécessaires pour que le porc ait une croissance normale. Nous supposons qu'un porc mangera jusqu'à ce que son besoin en énergie soit satisfait, ni plus ni moins [34]. Ainsi, cette contrainte apparaîtra comme contrainte d'égalité dans la formulation mathématique et aura la forme suivante

$$m_E \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_a \right) = e_j, \quad \forall j \in J. \quad (1.8)$$

où m_E est l'apport en énergie des ingrédients et e_j le besoin en énergie du jour j .

1.2.5 Contraintes d'ingestion

Les contraintes liées à la capacité d'ingestion sont des contraintes physiques des animaux. En effet, un animal possède un estomac pouvant accueillir une quantité maximale [21]. Ainsi,

la quantité d'aliments donnée au jour j ne doit pas dépasser cette capacité, notée W_j^{\max} . La contrainte est donc une contrainte d'inégalité et s'écrit sous la forme

$$\sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{\max}, \quad \forall j \in J. \quad (1.9)$$

Enfin, la quantité d'aliments donnée ne pouvant pas être négative par définition, nous introduisons des bornes sur les variables Q définies par l'équation

$$q_{ja} \geq 0, \quad \forall a \in A, \forall j \in J. \quad (1.10)$$

Dans la suite de cette thèse, et afin de simplifier la lecture, nous noterons S_j l'ensemble des contraintes à satisfaire pour la jour j . Ainsi, une diète satisfaisant les contraintes du jour j du problème sera notée $q_{ja}x_a \in S_j$, où

$$S_j = \left\{ \sum_{a \in A} q_{ja}x_a \left| \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_n.y \leq \bar{b}_{nj} & \forall n \in N, \\ m_E y = e_j, \\ \sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{\max}, \\ q_{ja} \geq 0 & \forall a \in A, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max} & \forall a \in A, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 & \forall a \in A. \end{array} \right. \right\}. \quad (1.11)$$

1.3 Les différentes formulations

1.3.1 La formulation traditionnelle

Aujourd'hui, dans la plupart des unités de production porcine, les porcs sont nourris en trois phases, avec un mélange complet pour chaque phase (figure 1.6), c'est-à-dire que chaque mélange satisfait à lui seul tous les besoins de la phase à laquelle il est associé. De plus, leur densité énergétique est connue, et généralement fixée à 2475 kcal/kg.

Comme nous le précisons dans la section 1.2, nous avons supposé que les porcs se nourrissent jusqu'à satisfaire leur besoin en énergie. Connaissant ce besoin, nous pouvons déterminer la

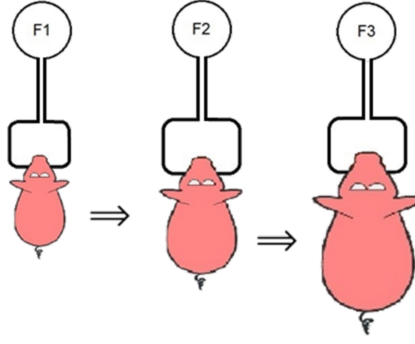


Figure 1.6 – Illustration du fonctionnement de l'alimentation traditionnelle.

quantité d'aliments ingérés chaque jour. Ainsi, la variable correspondante Q est connue et peut être fixée à ces valeurs.

Finalement, le modèle mathématique correspondant à cette alimentation ne comporte que la variable X comme inconnue, soit l'aliment utilisé pour chacune des phases. Nous pourrions constater au fil de la description de cette alimentation que le modèle mathématique associé à l'alimentation traditionnelle est un modèle linéaire.

En reprenant les formules de la section précédente, le modèle mathématique correspondant à une telle alimentation, c'est-à-dire une alimentation à trois phases utilisant un unique mélange par phase, soit trois au total, et dont la densité énergétique est fixée, est notée MC-3PF-EF et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \sum_{j \in J} c^t(q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2} + q_{j3}x_{.3}) \\ \text{s.à} & q_{j1}x_{.1} \in S_j, \quad j \in J_1, \\ & q_{j2}x_{.2} \in S_j, \quad j \in J_2, \\ & q_{j3}x_{.3} \in S_j, \quad j \in J_3. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où J_1 , J_2 et J_3 correspondent aux ensembles de jours de la phase 1, 2 et 3 respectivement.

On peut constater que le modèle présenté ici est un modèle de programmation linéaire. Mis à part le fait que les contraintes et les variables soient bornées supérieurement, ce modèle est très proche de celui introduit par Stigler en 1945.

Ainsi, le problème (1.12) peut être résolu à l'aide de solveurs linéaires tels que Minos [69], Loqo [103] ou encore CPLEX, et sa valeur optimale est 100.33 pour le scénario de prix de

2011 et de 73.94 pour le scénario de prix de 2016.

Ce type d'alimentation est couramment utilisé dans l'industrie porcine, en France comme au Canada, c'est pourquoi toutes les comparaisons faites dans la suite de cet essai seront réalisées par rapport à cette alimentation.

1.3.2 La formulation multiphase

Plus tard, une étude concernant le nombre de phases d'alimentation à considérer a été réalisée. Letourneau-Montminy *et al.* [64] ont étudié en 2005 l'impact économique et environnemental d'une alimentation utilisant un aliment complet par phase en fonction du nombre de phases. Les aliments utilisés doivent donc satisfaire les besoins des animaux pour chacune des phases. Ici encore, la densité énergétique étant fixée, les variables " q_{ja} " sont connues et fixées, et le problème à résoudre est alors un programme linéaire.

Cette alimentation est mathématiquement modélisée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_X & \sum_{a \in A} \sum_{j \in J} q_{ja} (c^t x_a) = \sum_{j \in J} q_j (c^t x_j) \\ \text{s.à} & x_a \in S_j, \end{cases} \quad \forall j \in J_a, \forall a \in A. \quad (1.13)$$

où $A = \{1, 2, \dots, p\}$ avec p représentant le nombre de phases d'alimentation et J_a est l'ensemble des jours de la phase a . En utilisant les notations définies précédemment, cette alimentation sera notée MC- p PF-EF lorsque p phases sont considérées.

Lors de cette étude, nous avons considéré une de 2 à 10 phases et $|J|$ phases, correspondant à des phases quotidiennes. Nous avons constaté une diminution du coût de l'alimentation avec une augmentation du nombre de phases.

que plus le nombre de phases augmente, plus le coût de l'alimentation diminue. En observant nos solutions, nous remarquons que le coût unitaire des aliments diminue au cours du temps. Il est raisonnable de penser qu'en augmentant le nombre de phases, le coût de l'alimentation diminue. Or, nous ne pouvons le prouver que lorsque les changements de phase se font aux

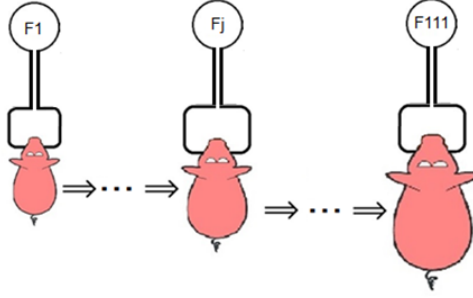


Figure 1.7 – Illustration de l'alimentation idéale.

mêmes moments. Par exemple, nous pouvons le prouver en passant de 2 à 4 phases en divisant chaque phase en 2 sous-phases, mais pas lorsque nous passons de 2 à 3 phases, avec des phases de durée égale.

Le système d'alimentation le plus avantageux économiquement est celui comptant $T = |J|$ phases. Cette formulation est également appelée méthode idéale.

1.3.3 L'alimentation idéale

L'alimentation idéale permet de nourrir les animaux avec le mélange satisfaisant les besoins et contraintes et à coût optimal pour chaque jour (figure 1.7). Son modèle mathématique est donné par

$$\begin{cases} \min_X & \sum_{a \in A} \sum_{j \in J} q_{ja} (c^t x_{.j}) \\ \text{s.à} & q_{ja} x_{.a} \in S_j, \quad \forall j \in J. \end{cases} \quad (1.14)$$

Selon les notations utilisées, elle est notée MC-IF-EL. Sa solution optimale a un coût de 96.99 pour le scénario 2011 et 70.18 pour le scénario 2016, ce qui correspond à une réduction de 3.33% et 5.09% respectivement, en comparaison à MC-3PF-EF.

Le coût d'alimentation peut encore être réduit. En effet, nous introduisons une méthode de modélisation permettant de laisser l'énergie des aliments varier d'un jour à l'autre. Cette méthode sera par la suite appelée modèle à énergie libre.

Cela nous amène donc à l'étude de MC-IF-EL. Même dans ce cas, le problème étudié reste

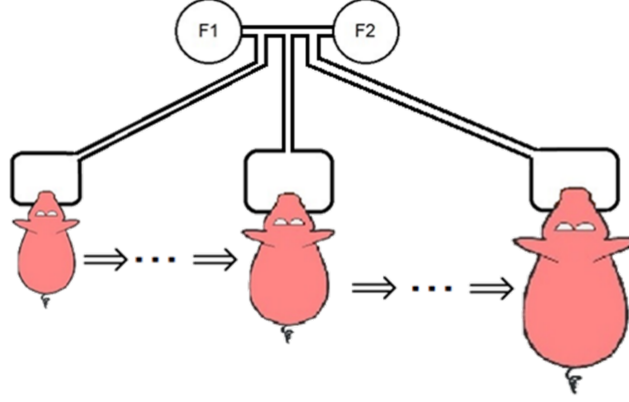


Figure 1.8 – Illustration du fonctionnement de l'alimentation par mélanges.

linéaire dû au fait que le problème est séparable jour par jour et que des aliments complets sont utilisés. La solution de ce problème a un coût de 94.84 pour le scénario 2011 et 67.23 pour le scénario 2016, soit une réduction de 5.47% et 9.07% respectivement, en comparaison à MC-3PF-EF.

Cette alimentation a toutefois un inconvénient majeur, le nombre d'aliments à stocker. En effet, un aliment différent par jour signifie $|J|$ aliments à stocker, ce qui est irréalisable pour les éleveurs. Cependant, nous garderons cette alimentation comme objectif idéal à atteindre.

1.3.4 La formulation par mélanges

Plus récemment, nous avons développé l'alimentation dite par mélanges [56, 57]. Cette méthode consiste à nourrir les animaux avec deux prémélanges et en considérant des phases quotidiennes (figure 1.8). Les prémélanges seront combinés différemment chaque jour afin de satisfaire les besoins journaliers. Cette alimentation est notée MC-1MF-EL.

Nous utilisons deux prémélanges, donc $A = \{1, 2\}$. Les phases d'alimentation sont quotidiennes, ainsi $J = 1, \dots, 111$. La composition de l'aliment utilisé au jour j est donc donnée par la formule

$$y_{\cdot j} = q_{j1}x_{\cdot 1} + q_{j2}x_{\cdot 2}. \quad (1.15)$$

Contrairement aux alimentations présentées précédemment qui minimisaient le coût de l'aliment (\$/kg), celle-ci cherche à minimiser le coût total de l'alimentation (\$/porc). La densité énergétique des prémélanges utilisée sera dite variable, c'est-à-dire qu'elle n'est pas connue avant l'optimisation et qu'elle peut varier d'un mélange à un autre. Dans ce cas, les quantités q_1 et q_2 sont inconnues (car elles dépendent de la densité énergétique) et sont donc considérées comme variables dans les modélisations.

Ainsi, en suivant les notations introduites précédemment, le modèle mathématique associé à cette alimentation est donné par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} c^t (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \\ \text{s.à} & (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \in S_j, \quad \forall j \in J. \end{cases} \quad (1.16)$$

Le modèle présenté ci-dessus est un problème bilinéaire. En effet, les variables du problème étant la composition des prémélanges ($X = (x_{ia})$) et les quantités de chacun d'eux données chaque jour ($Q = (q_{ja})$), on peut noter que la fonction objectif et les contraintes sur l'énergie et les nutriments font apparaître des termes bilinéaires $q_{ja}x_{.a}$.

Nous verrons plus tard (chapitre 2) dans ce manuscrit que c'est ce problème qui a été le principal axe de recherche de ma thèse. En effet, les problèmes bilinéaires sont des problèmes non convexes et il est donc difficile d'en obtenir une solution globale. Nous sommes toutefois capables d'obtenir une solution locale.

Le coût de l'alimentation associé à ce système d'alimentation que nous avons déterminé grâce à un solveur d'optimisation non linéaire tel que Ipopt [105] par exemple est de 96.23\$ pour le scénario 2011 et de 68.99\$ pour le scénario 2016. Ceci représente une réduction de 4.08% et 6.69% respectivement par rapport à une alimentation traditionnelle. De plus, nous avons pu constater que les rejets liés à cette alimentation étaient réduits de 3.3% pour le phosphore et de 14.8% pour l'azote pour le scénario de 2011. Si on considère le scénario 2016, les rejets de phosphore augmentent légèrement (+0.31%) tandis que ceux d'azote sont réduits (-6.25%).

1.4 Une nouvelle formulation hybride

Durant cette thèse, nous avons développé de nouveaux modèles, permettant de réduire davantage le coût de l'alimentation. Nous les présentons dans cette section.

Une façon de réduire davantage le coût de l'alimentation est de combiner l'alimentation par phase (p PF) et l'alimentation par mélanges (1MF). Cette alimentation consiste à diviser la période de croissance des animaux en p phases et pour chacune d'elle, les animaux sont nourris suivant une alimentation par mélanges.

Le modèle représentant cette alimentation est

$$\begin{cases} \min_{X,Q} & \sum_{k \in \{1, \dots, p\}} \sum_{j \in J_k} c^t(q_{kj1}x_{k.1} + q_{kj2}x_{k.2}) \\ \text{s.à} & q_{kj1}x_{k.1} + q_{kj2}x_{k.2} \in S_j, \quad \forall j \in J_k, \forall k \in \{1, \dots, p\}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Cette alimentation, notée p MF, présente toutefois un défaut qui nous empêche de l'utiliser en industrie. En effet, on peut constater sur les résultats numériques de l'alimentation 1MF, que la répartition d'utilisation des mélanges est d'environ 70% pour un et 30% pour l'autre. Pour des raisons pratiques et économiques, il est préférable que les silos soient remplis avec des quantités similaires.

Une manière d'y parvenir est que deux phases consécutives aient un mélange en commun. Nous proposons donc une nouvelle formulation de l'alimentation : la méthode hybride. Nous notons cette alimentation XX - p HF-EL, où XX est MC ou TC en fonction du nombre de critères considérés. Le fonctionnement de cette alimentation est le suivant :

- la période de croissance est divisée en p phases,
- pour chaque phase, deux prémélanges sont utilisés,
- les deux prémélanges sont combinés différemment quotidiennement,
- deux phases consécutives ont un mélange en commun,
- un total de $p + 1$ prémélanges est utilisé.

Le cas $p = 3$, sera régulièrement considéré comme exemple tout au long de cette section, c'est pourquoi nous le détaillons davantage. Ainsi, lorsque nous considérons la méthode hybride à trois phases, le fonctionnement est le suivant :

- les mélanges 1 et 2 sont combinés dans la phase 1,
- les mélanges 2 et 3 sont combinés dans la phase 2,
- les mélanges 3 et 4 sont combinés dans la phase 3.

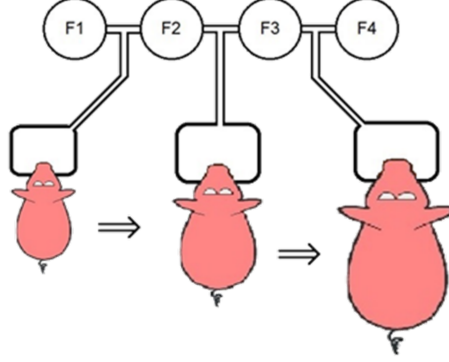


Figure 1.9 – Illustration de l'alimentation hybride.

La figure 1.9 illustre schématiquement cette alimentation.

1.4.1 Modélisation mathématique

De manière générale, l'alimentation hybride à p phases considère $p+1$ mélanges. En utilisant les notations définies précédemment, on considère $A = \{1, 2, \dots, p, p+1\}$. Les variables du modèle sont donc $x_{.1}, x_{.2}, \dots, x_{.p}, x_{.p+1}$ pour les $p+1$ mélanges utilisés et $q_{.1}, q_{.2}, \dots, q_{.p}, q_{.p+1}$ pour les quantités données de chaque mélange. Ainsi, l'aliment donné à un animal le jour j est donné par la formule

$$\sum_{a \in A} q_{ja} x_{.a}. \quad (1.18)$$

Le coût de l'alimentation est alors modélisé par la fonction

$$\sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} c^t x_{.a}. \quad (1.19)$$

Notons J_1, J_2, \dots, J_p , les ensembles de jours des phases 1, 2, ..., p , respectivement.

Afin que les mélanges soient utilisés de la manière dont on le souhaite, nous devons forcer les quantités utilisées à être nulles lorsque le mélange n'est pas utilisé. Un mélange k est utilisé

uniquement pendant les phases $k - 1$ et k . Les contraintes que nous devons considérer sont donc définies par

$$q_{j1} = 0, \quad \forall j \notin J_1, \quad (1.20)$$

$$q_{jk} = 0, \quad \forall j \notin J_{k-1} \cup J_k, \forall k \in \{2, \dots, p\}, \quad (1.21)$$

$$q_{j,p+1} = 0, \quad \forall j \notin J_p. \quad (1.22)$$

La réalisabilité des contraintes nutritionnelles est quant à elle, donnée par la formule

$$\sum_{a \in A} q_{ja} x_{\cdot a} \in S_j. \quad (1.23)$$

Finalement, le modèle général de l'alimentation hybride monocritère (MC - p HF-EL) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X, Q} & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} c^t x_{\cdot a} \\ \text{s.à} & \sum_{a \in A} q_{ja} x_{\cdot a} \in S_j, \quad \forall j \in J, \\ & q_{j1} = 0, \quad \forall j \notin J_1, \\ & q_{jk} = 0, \quad \forall j \notin J_{k-1} \cup J_k, \forall k \in \{2, \dots, p\}, \\ & q_{j,p+1} = 0, \quad \forall j \notin J_p. \end{array} \right. \quad (P_{Hybride})$$

Le problème ($P_{Hybride}$) reste un problème d'optimisation très difficile : la fonction objectif et les contraintes sont bilinéaires. Dans l'étude mathématique présentée plus loin dans le chapitre 2, nous décrivons les différentes propriétés, les avantages et inconvénients associées à ce type de problème.

Nous avons présenté cette nouvelle formulation hybride, le modèle et les résultats numérique associés lors des 49^e Journées de la Recherche Porcine et ont fait l'objet d'un article de conférence (annexe B)

1.4.2 Résultats numériques

Nous avons appliqué le modèle MC - p HF-EL ($P_{Hybride}$) pour les données de 2011 et 2016. Afin d'évaluer l'impact de cette méthode d'alimentation, nous faisons varier p pour des valeurs

Données	Méthode	Coût (\$/porc)	P excrété (kg)	N excrété (kg)
2011	MC-1MF-EL	100.33	1.203	4.062
	MC-1HF-EL	96.23	1.163	3.463
	MC-2HF-EL	95.29	1.191	3.347
	MC-3HF-EL	95.12	1.177	3.339
	MC-4HF-EL	95.10	1.170	3.324
	MC-IF-EL	94.84	1.172	3.293
2016	MC-1MF-EL	73.94	1.298	4.112
	MC-1HF-EL	68.99	1.302	3.855
	MC-2HF-EL	68.37	1.298	3.879
	MC-3HF-EL	67.66	1.279	3.843
	MC-4HF-EL	67.50	1.277	3.896
	MC-IF-EL	67.23	1.274	3.862

Tableau 1.2 – Comparaison des méthodes d'alimentation $MC-pHF-EL$, pour $p=1$ à $p=4$, avec l'alimentation traditionnelle et l'alimentation idéale, appliquée aux données de 2011 et 2016.

de 1 à 4 et nous comparons les résultats à l'alimentation traditionnelle MC-3PF-EF et à l'alimentation idéale MC-IF-EL.

Notons que l'alimentation par mélanges MC-1MF-EL peut aussi être notée MC-1HF-EL. En effet, la période de croissance est considérée comme une seule phase et deux aliments sont combinés chaque jour de façon différente.

Le tableau 1.2 regroupe le coût de l'alimentation, et les rejets de phosphore et d'azote pour les différentes méthodes d'alimentation monocritère. On note qu'augmenter le nombre de phases permet de réduire le coût de l'alimentation de 5.0%, 5.19% et 5.21% respectivement pour $p = 2, 3$ et 4, en utilisant les données de 2011. Parallèlement, les rejets de phosphore sont réduits entre 1.0% et 3.3% et les rejets d'azote entre 14.8% et 18.2%.

Lorsque ce modèle est appliqué aux données de 2016, les résultats numériques sont semblables. Pour $p = 2, 3$ et 4, on observe une réduction du coût de l'alimentation de 7.53%, 8.49% et 8.70% respectivement. Les rejets de phosphore sont, quant à eux, réduits jusqu'à 1.7% et ceux d'azote entre 5.25% et 6.5%.

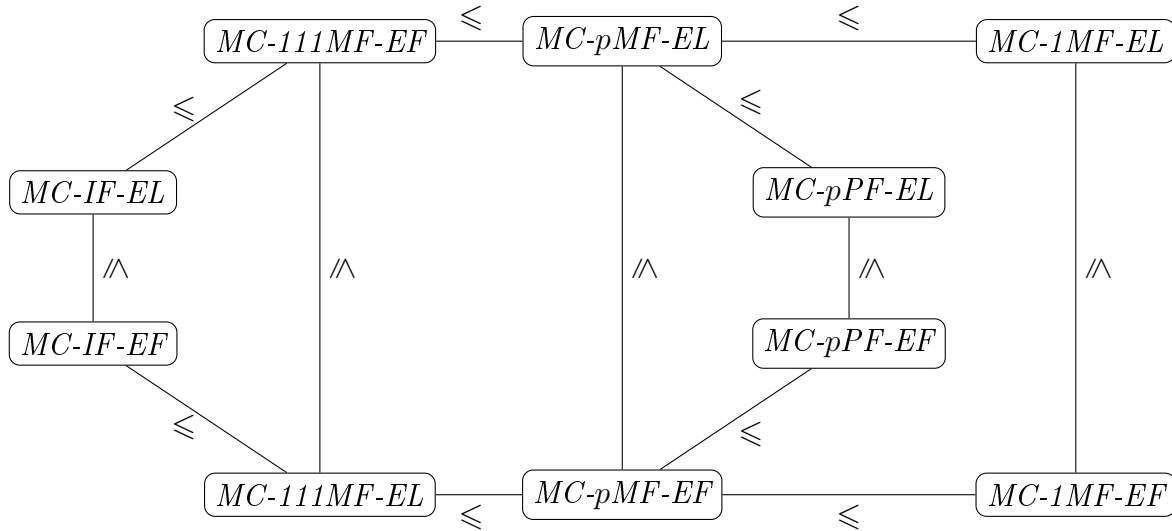
Nous ne présentons pas les résultats pour des $p \geq 5$ dans ce manuscrit. En effet, on peut

remarquer, dans le tableau 1.2, que le coût d'une alimentation hybride à 4 phases est situé à seulement 0.29% de l'alimentation idéale lorsque nous utilisons les données de 2011, et à 0.37% lorsque nous utilisons les données de 2016. L'amélioration que nous réalisons en augmentant p est très faible pour des valeurs de $p \geq 5$. Toutefois, augmenter le nombre de phases considérées diminuera le coût de l'alimentation.

1.5 Hiérarchie des modèles

Il existe une hiérarchie entre les valeurs optimales des différents modèles mathématiques que nous venons d'introduire, chacun représentant une alimentation. Ainsi, en version monocritère, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1 *Les valeurs optimales des modèles d'alimentation sont liées par les relations suivante, où les inégalités sur les segments verticaux doivent être lues de haut en bas :*



Preuve.

Soit M_1 et M_2 deux modèles. On veut montrer que leurs valeurs optimales suivent la relation

suivante :

$$v(M_1) \leq v(M_2).$$

Pour cela, il suffit de remarquer que la solution optimale de M_2 , $x^*(M_2)$ est une solution réalisable pour M_1 .

1. $v(\text{MC-XXX-EL}) \leq v(\text{MC-XXX-EF})$.

Il est évident que la valeur optimale d'un modèle MC-XXX-EF est plus grande que celle d'un modèle MC-XXX-EL. En effet, les modèles à énergie fixe sont modélisés de la même manière que les modèles à énergie libre, avec cependant la contrainte de densité énergétique en plus, modélisée par

$$\sum_{i \in I} m_E^t x_{\cdot a} = d_{Ej}, \quad (1.24)$$

où d_{Ej} est la densité énergétique souhaitée.

2. $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-1MF-EL})$ et $v(\text{MC-}p\text{MF-EF}) \leq v(\text{MC-1MF-EF})$.

Notons x_A et x_B les mélanges utilisés dans la solution optimale x_1^* de MC-1MF-EL. Il suffit de noter qu'en utilisant, pour chaque phase de MC- p MF-EL, les mélanges x_A et x_B , nous retrouvons x_1^* . C'est une solution réalisable du problème MC- p MF-EL, sans qu'elle soit forcément optimale. Ainsi, on a bien $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-1MF-EL})$. On utilise la même technique pour prouver $v(\text{MC-}p\text{MF-EF}) \leq v(\text{MC-1MF-EF})$.

3. $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{PF-EL})$ et $v(\text{MC-}p\text{MF-EF}) \leq v(\text{MC-}p\text{PF-EF})$.

Notons $x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{p1}, x_{p2}$ les mélanges utilisés dans la solution optimale de MC- p MF-EL. On remarque alors qu'en posant fixant $x_{\lambda 2} = 0$ dans le modèle MC- p MF-EL, on retrouve la solution optimale de MC- p PF-EL. On a donc immédiatement que $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{PF-EL})$. On utilise la même technique pour prouver $v(\text{MC-}p\text{MF-EF}) \leq v(\text{MC-}p\text{PF-EF})$.

4. $v(\text{MC-111MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{MF-EL})$ et $v(\text{MC-111MF-EF}) \leq v(\text{MC-}p\text{MF-EF})$.

Soit $(x_A^*, x_B^*, q_A^*, q_B^*)$ une solution optimale de MC- p MF-EL. On remarque qu'en posant, pour tout $j \in J$, $x_{Aj} = x_A^*, x_{Bj} = x_B^*, q_{Aj} = q_A^*$ et $q_{Bj} = q_B^*$, on retrouve

un point réalisable de MC-111MF-EL et on a immédiatement que $v(\text{MC-111MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{MF-EL})$. On utilise la même technique pour montrer que $v(\text{MC-111MF-EF}) \leq v(\text{MC-}p\text{MF-EF})$.

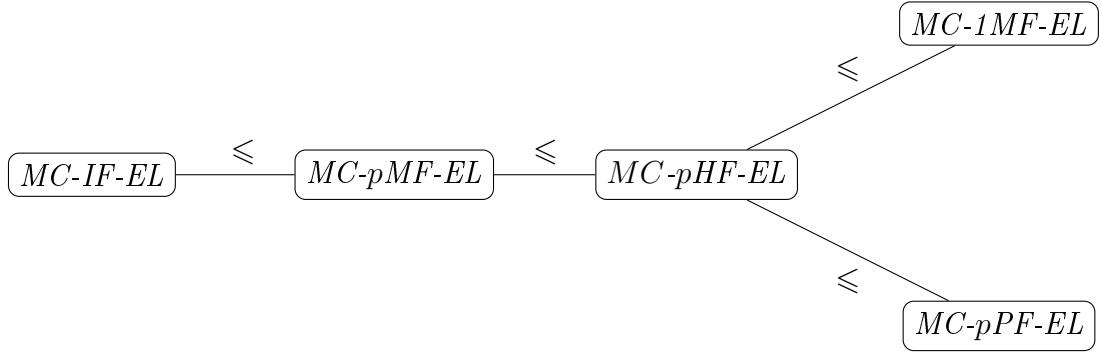
5. $v(\text{MC-IF-EL}) \leq v(\text{MC-111MF-EL})$ et $v(\text{MC-IF-EF}) \leq v(\text{MC-111MF-EF})$.

Soient $(x_{A1}^*, x_{B1}^*, \dots, x_{A111}^*, x_{B111}^*, q_{A1}^*, q_{B1}^*, \dots, q_{A111}^*, q_{B11}^*)$ une solution de MC-111MF-EL. On remarque qu'en posant $x_{ij} = q_{Aj}^* x_{Aji}^* + q_{Bj}^* x_{Bji}^*$ pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$ on obtient un point réalisable de MC-IF-EL. On a donc immédiatement que $v(\text{MC-IF-EL}) \leq v(\text{MC-111MF-EL})$. On utilise la même technique pour montrer que $v(\text{MC-IF-EF}) \leq v(\text{MC-111MF-EF})$.

■

Il existe également une hiérarchie avec les modèles de l'alimentation hybride qui est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 2 *Les valeurs optimales des modèles d'alimentation à énergie libre sont liées par les relations suivantes :*



Preuve.

1. $v(\text{MC-}p\text{HF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{PF-EL})$.

Soit x_1, x_2, \dots, x_p les mélanges de la solution optimale de MC- p PF-EL et q_1, q_2, \dots, q_p les quantités. Notons que pour chaque phase k , on a $q_{jk} \neq 0$ si et seulement si $j \notin J_k$. Remarquons maintenant que cette solution est réalisable pour le problème MC- p HF-EL. En effet, pour chaque phase k , on peut utiliser les mélanges x_k et x_{k+1} , ainsi que

les quantités associées, avec x_{p+1} n'importe quel mélange et $q_{p+1} = 0$. Ainsi, dans la phase 1, on utilise les mélanges 1 et 2, mais $q_{j2} = 0$ pour tout $j \in J_1$. Finalement, uniquement le mélange 1 est utilisé en phase 1. Pour la phase 2, on utilise les mélanges 2 et 3, mais $q_{j3} = 0$ pour tout $j \in J_3$, donc finalement uniquement le mélange 2 est utilisé. Et on procède de la même manière pour toutes les phases. Ainsi, la solution optimale de MC- p PF-EL est une solution réalisable de MC- p HF-EL.

2. $v(\text{MC-}p\text{HF-EL}) \leq v(\text{MC-1MF-EL})$.

Soit x_1 et x_2 les mélanges de la solution optimale du modèle MC-1MF-EL et q_1 et q_2 les quantités associées. Notons y_1, y_2, \dots, y_{p+1} les mélanges de l'alimentation MC- p HF-EL et w_1, w_2, \dots, w_{p+1} les quantités associées. En prenant, pour chaque phase k , $y_k = x_1, y_{k+1} = x_2$ et $w_{jk} = q_{j1}, w_{j,k+1} = q_{j2}$ pour tout $j \in J_k$ si k est impair et $y_k = x_2, y_{k+1} = x_1$ et $w_{jk} = q_{j2}, w_{j,k+1} = q_{j1}$ pour tout $j \in J_k$ si k est pair, on retrouve la solution optimale du modèle MC-1MF-EL. Ainsi, c'est une solution réalisable du problème MC- p HF-EL, et on a directement $v(\text{MC-}p\text{HF-EL}) \leq v(\text{MC-1MF-EL})$.

3. $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{HF-EL})$

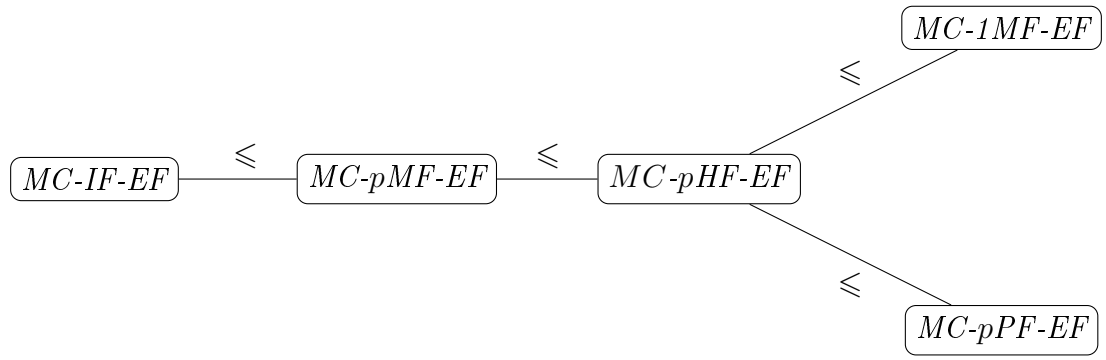
Cette inégalité découle immédiatement du fonctionnement de l'alimentation hybride. En effet, soit x_1, x_2, \dots, x_{p+1} les mélanges de la solution optimale du modèle MC- p HF-EL et q_1, q_2, \dots, q_{p+1} les quantités associées et soit $y_1, y_2, \dots, y_{2p}, w_1, w_2, \dots, w_{2p}$ les mélanges et quantité d'une solution de MC- p MF-EL. Pour chaque phase $k \geq 2$, si nous posons les mélanges y_{k-2} et y_{k-1} à être égaux au mélange x_k et $w_{j,2k-2} = q_{jk}$ pour tout $j \in J_{k-1}$ et $w_{j,2k-1} = q_{jk}$, pour tout $j \in J_k$. On pose de plus $y_1 = x_1$, et $w_{j1} = q_{j1}$ pour tout $j \in J_1$. Ainsi, cette solution, identique à la solution optimale de MC- p HF-EL est une solution réalisable de MC- p MF-EL d'où $v(\text{MC-}p\text{MF-EL}) \leq v(\text{MC-}p\text{HF-EL})$.

■

On a les mêmes relations pour une alimentation à énergie fixe. Sa preuve se fait de la même manière que celle du théorème 2.

Théorème 3 *Les valeurs optimales des modèles d'alimentation à énergie fixe sont liées par*

les relations suivantes :



CHAPITRE 2

Optimisation globale du modèle bilinéaire

Ce chapitre est consacré à une étude approfondie du problème bilinéaire que nous avons défini dans les chapitres précédents et que nous avons dénommé MC-1MF-EL.

La résolution numérique de ce modèle se fait facilement grâce à différents solveurs d'optimisation non linéaire. De plus, nous obtenons de très bons résultats avec une diminution du coût de l'alimentation de plus de 4%, pour les deux jeux de données réelles dont nous disposons.

Toutefois, d'un point de vue mathématique, ce problème est extrêmement difficile à résoudre. Même dans la version la plus simple, le bilinéaire disjoint, ce problème est difficile. Vérifier qu'il existe une solution optimale bornée de tels problèmes est NP-difficile[5, 10]. Les problèmes bilinéaires étant non convexes, ils peuvent disposer de plusieurs minima locaux. Or, nous souhaitons, la plupart du temps, obtenir un minimum global aux problèmes que nous résolvons.

La recherche de solutions globales optimales à des problèmes non convexes est un domaine actif de recherche depuis plusieurs années [11, 37, 52, 39, 75, 86, 93]. Il existe quelques

solveurs globaux d'optimisation, tels que BARON [97, 87] ou Couenne [16], qui utilisent des algorithmes de Branch and Bound. Ces algorithmes déterminent une borne supérieure et une borne inférieure au problème non convexe que nous souhaitons résoudre et les raffinent successivement jusqu'à ce qu'elles soient égales. Dans ce cas, nous sommes en présence d'un minimum global. De tels algorithmes sont très efficaces pour des problèmes de petite taille, mais sont très coûteux pour des problèmes de grande taille. Dans ce cas, d'autres approches doivent être utilisées.

Lorsque nous considérons le problème de diète porcine que nous avons introduit dans les chapitres précédents, nous sommes en présence d'un problème de trop grande dimension pour cette approche. En effet, comme précédemment, nous considérons deux instances, correspondant à un scénario de 2011 pour l'un et à un scénario de 2016 pour l'autre. Dans le premier cas, nous avons un problème à 254 variables et 2700 contraintes et dans le second, le problème a 258 variables et 2704 contraintes. Dans les deux cas, nous souhaitons déterminer le minimum global du problème.

En utilisant les différents solveurs non linéaires existant sur le marché nous pouvons déterminer des solutions locales à ces problèmes. Après avoir effectué différents tests numériques, nous conjecturerons que la solution obtenue est en fait une solution globale (section 2.2.1). Nous utiliserons ensuite différentes approches afin de la valider.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La section 2.1 introduira le problème ainsi que sa complexité. Dans la section 2.2 nous conjecturerons que toute solution local du problème bilinéaire de diète porcine est un minimum global et nous présenterons différentes approches la supportant.

2.1 Mise en contexte

2.1.1 Introduction au problème

Nous nous intéressons ici à un problème à objectif bilinéaire sans termes linéaires et à contraintes bilinéaires et linéaires.

En utilisant les notations suivantes :

- I l'ensemble des ingrédients,
- J l'ensemble des jours de la période de croissance,
- P l'ensemble des nutriments,
- x_1 et x_2 la composition des aliments,
- y_1 et y_2 les quantités journalières de x_1 et x_2 respectivement,
- q^0 le coût des ingrédients,
- q^p la quantité de nutriment p fourni par les ingrédients,
- \underline{d}^p et \bar{d}^p les bornes inférieure et supérieure du nutriment p ,
- A une matrice représentant les contraintes linéaires (typiquement, la contrainte de proportion sur la composition des aliments et la contrainte de capacité d'ingestion),
- \underline{b} et \bar{b} les bornes inférieure et supérieure des contraintes linéaires,
- $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{y_1}$ et u_{y_2} les bornes supérieures des variables,

le problème bilinéaire auquel nous nous intéressons s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x_1, x_2, y_1, y_2} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 (x_{1i} y_{1j} + x_{2i} y_{2j}) \\ \text{s.à} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (x_{1i} y_{1j} + x_{2i} y_{2j}) \leq \bar{d}_j^p, \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_1} \\ u_{y_2} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Ce modèle se limite aux contraintes d'inégalités. Dans le cas de contraintes d'égalité, on

considérera que les bornes supérieure et inférieure sont égales. Il y a $2(|I| + |J|)$ variables et $|P| \times |J|$ contraintes bilinéaires. Le nombre de contraintes linéaires correspond au nombre de lignes de la matrice A et il y a au plus $2(|I| + |J|)$ contraintes de bornes.

Les problèmes bilinéaires ont été introduits pour la première fois par Nash [70] dans le cadre de la théorie des jeux avec ce qui est aujourd'hui appelé le *jeu bimatriciel*. Le problème bilinéaire traditionnel, et le plus souvent étudié, a une fonction objectif bilinéaire et des contraintes linéaires. Il est généralement formulé

$$\begin{cases} \min_{x,y} & c^t x + x^t Q y + d^t y \\ \text{s.à} & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ces problèmes diffèrent cependant du problème (2.1) car ils ne contiennent pas de contraintes bilinéaires. Le problème (2.2) a été largement étudié [2, 4, 17, 18, 35, 40, 42, 43, 53, 58, 60, 59, 65, 73, 90, 92, 91, 99] et différents algorithmes ont été développés afin de déterminer une solution globale. Certains utilisent des algorithmes de Branch and Bound [4, 35, 40, 65, 92, 91], des algorithmes de plans coupants [2, 43, 90], ou encore des transformations en problèmes linéaires mixtes en nombres entiers [17, 42, 58, 73]. Notons que ces algorithmes ont été testés sur des problèmes de petite taille, généralement moins de 10 variables et 10 contraintes. Le plus gros problème considéré dans ces différents articles a 168 variables et 48 contraintes [90]. Cependant, ce problème a été introduit il y a plusieurs décennies. Les articles plus récents appliquent leurs méthodes et algorithmes sur des problèmes ayant 23 variables et 5 contraintes [65], qui restent petits comparativement au problème de diète porcine auquel nous nous intéressons et qui comporte environ 250 variables et 2700 contraintes.

2.1.2 Instances considérées

Tout au long de ce chapitre, deux instances typiques seront considérées. Elles correspondent à deux scénarios réels à des instants différents. Pour plus de simplicité, nous les dénommerons *instance 1* et *instance 2*. La modélisation est faite sur un animal moyen, représentatif d'une

population.

L'instance 1 correspond à des données de 2011. La période de croissance de l'animal est de 111 jours et 16 ingrédients différents sont utilisés. Ainsi, nous avons $|I| = 16$ et $|J| = 111$, c'est-à-dire $2(|I| + |J|) = 254$ variables. De plus, $|P| = 21$ et $A \in \mathbb{R}^{(4+|J|) \times 2(|I|+|J|)}$. Ainsi, le problème que nous considérons dans cette instance a $|P| \times |J| = 2331$ contraintes bilinéaires, dont 111 contraintes d'égalité, $(4 + |J|) = 115$ contraintes linéaires et $2(|I| + |J|) = 254$ contraintes de borne, soit un total de 2700 contraintes.

Dans l'instance 2, correspondant à des données de 2016, seuls la liste des ingrédients et leur prix changent. Dans ce cas, 18 ingrédients sont utilisés. Ainsi, nous avons $|I| = 18$, $|J| = 111$, $|P| = 21$ et $A \in \mathbb{R}^{(4+|J|) \times 2(|I|+|J|)}$. Le problème a alors 258 variables, 2331 contraintes bilinéaires, dont 111 contraintes d'égalité, 115 contraintes linéaires et 258 contraintes de borne, soit un total de 2704 contraintes.

Dans les deux scénarios, les contraintes associées au besoin en énergie, que nous avons décrites en détail par l'équation (1.8) page 14, sont considérées comme contraintes d'égalité. Les aliments étant modélisés en proportion, nous avons deux contraintes linéaires d'égalité (une pour chaque mélange). De plus, la proportion d'un des ingrédients est fixée à 0.5% dans chaque mélange. Ainsi, nous avons un total de 115 contraintes d'égalité.

La plupart des contraintes linéaires d'inégalité représentent les besoins en nutriments. Une contrainte linéaire représente la capacité d'ingestion (voir (1.9) page 15), tandis que les autres sont des contraintes de borne.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur un animal moyen. En effet, nous verrons dans le chapitre 5 la modélisation de l'alimentation d'un troupeau et nous constaterons que la taille du problème augmente rapidement. En effet, pour chaque animal supplémentaire, nous devons ajouter $2|J| = 222$ variables et $(|P| + 3)|J| = 2664$ contraintes. Nous verrons dans les sections suivantes les difficultés rencontrées en ne considérant qu'un animal moyen. Ainsi, pour simplifier cette étude, nous ne considérerons pas le troupeau, mais uniquement le modèle sur un animal moyen.

2.1.3 Le modèle idéal : une borne inférieure

Comme nous l'avons introduit dans la section 1.3.3, une borne inférieure naturelle au problème bilinéaire est donnée par le modèle d'alimentation idéale. On peut le remarquer grâce au théorème 1. Ce modèle étant linéaire, nous sommes assurés d'en obtenir une solution globale.

Pour l'instance 1, la valeur de la borne inférieure est de 94.84, tandis qu'elle est de 68.99 pour l'instance 2.

2.1.4 Formulation sous forme d'un problème de pooling

Le problème décrit par le modèle (2.1), peut être associé à un problème de pooling particulier. Les problèmes de pooling sont très connus pour être utilisés dans l'industrie pétrochimique et a été largement étudié [6, 7, 9, 19, 30, 40, 49, 50, 51, 85]. Comme pour le problème bilinéaire général, ces études présentent des méthodes basées sur des algorithmes de Branch and Bound. Certains essais numériques de ces méthodes ont été réalisés sur des problèmes d'assez grande dimension, mais ne sont généralement pas résolus à l'optimum global.

Dans cette section, nous décrivons deux façons de formuler un problème de pooling, la p -formulation et la q -formulation.

Le problème de pooling standard a été introduit par Haverly [51] en 1978. Le concept du problème de pooling est le suivant. Les matières premières, souvent appelées *inputs* (I), sont envoyées dans des réservoirs, souvent appelés *pools* (P), pour être mélangées ensemble. Les mélanges ainsi obtenus sont envoyés des réservoirs vers les produits finaux, souvent appelés *outputs* (O). Le problème de pooling peut être illustré par un graphe (figure 2.1).

Dans la p -formulation d'un problème de pooling, les variables reliant les *inputs* aux *pools*, représentées par les f_{ip} , $i \in I, p \in P$ dans le graphe de la figure 2.1, sont modélisées par la quantité circulant sur chaque arc. Aucune quantité ne doit rester dans les *pools*. Ainsi, nous

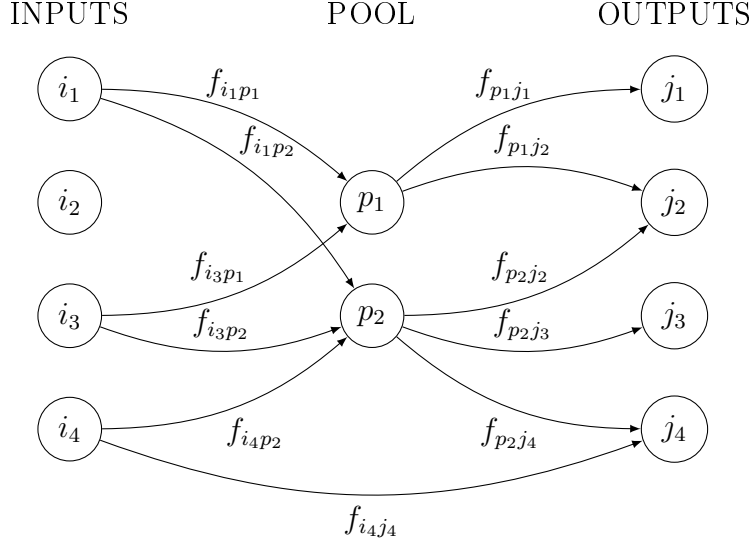


Figure 2.1 – Graphe représentant un problème de pooling.

devons alors ajouter une contrainte de conservation

$$\sum_{i \in I} f_{ip} = \sum_{j \in O} f_{pj} \quad \forall p \in P. \quad (2.3)$$

C'est ainsi que Haverly a introduit le problème de pooling dans [51].

Plus tard, Ben-Tal *et al.* [19] ont proposé de modéliser le flot entre les *inputs* et les *pools* en proportion. Cette formulation est appelée *q*-formulation et introduit une contrainte de proportion

$$\sum_{i \in I} f_{ip} = 1 \quad \forall p \in P. \quad (2.4)$$

Dans le cas de la diète porcine, les *inputs* ne peuvent pas être ajoutés directement aux *outputs*. Par exemple, dans la figure 2.1, l'arc $f_{i4,j4}$ n'est pas autorisé. À partir de maintenant, nous ne considérerons plus les arcs n'ayant pas d'extrémité dans P .

Dans la suite de cette section, nous nous concentrerons sur la modélisation du problème de pooling.

De manière plus générale, notons I l'ensemble des *inputs*, P l'ensemble des *pools*, O l'ensemble des *outputs* et K l'ensemble des attributs de qualité (nutriments dans le cas de l'alimentation

porcine). $N = I \cup P \cup O$ est l'ensemble des nœuds et pour tout $i \in N$, b_i est la capacité du nœud i .

L'ensemble des arcs est $A = (I \times P) \cup (P \times O)$ et pour tout $(i, j) \in A$, c_{ij} est le coût unitaire de l'arc (i, j) . Pour tout $i \in I$ et pour tout $k \in K$, q_i^k représente le paramètre de qualité unitaire de l'attribut k à l'input i , tandis que pour tout $o \in O$ et pour tout $k \in K$, q_o^k est la borne de qualité unitaire de l'attribut k à l'output o .

On notera N_i^+ l'ensemble des successeurs de i , i.e. $N_i^+ = \{j : (i, j) \in A\}$, et N_i^- l'ensemble des prédécesseurs de i , i.e. $N_i^- = \{j : (j, i) \in A\}$.

Soit f_{ij} le flot sur l'arc $(i, j) \in A$ et w_i^k la qualité unitaire de l'attribut $k \in K$ du flot quittant le nœud $i \in I \cup P$ (si $i \in I$, alors $w_i^k = q_i^k$). Le problème de pooling sous la forme p -formulation est alors donné par

$$(P_{p\text{-pooling}}) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{f, w} & \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} f_{ij} \quad (2.5) \\ \text{s.à} & \sum_{p \in N_i^+} f_{ip} \leq b_i, \quad \forall i \in N \setminus O, \quad (2.6) \\ & \sum_{p \in N_o^-} f_{po} \leq b_o, \quad \forall o \in O, \quad (2.7) \\ & \sum_{i \in N_p^-} f_{ip} - \sum_{o \in N_p^+} f_{po} = 0, \quad \forall p \in P, \quad (2.8) \\ & \sum_{i \in N_p^-} q_i^k f_{ip} - w_p^k \sum_{o \in N_p^+} f_{po} = 0, \quad \forall p \in P, \forall k \in K, \quad (2.9) \\ & \sum_{p \in N_o^-} w_p^k f_{po} - q_o^k \sum_{p \in N_o^-} f_{po} \leq 0, \quad \forall o \in O, \forall k \in K, \quad (2.10) \\ & f_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \quad (2.11) \end{array} \right.$$

Les contraintes (2.6)–(2.7) expriment les contraintes de capacité de chaque nœud, (2.8) exprime la conservation du flot entrant et sortant des *pools* et les contraintes (2.9) et (2.10) permettent de satisfaire la qualité de chaque arc.

La q -formulation est légèrement différente et découle d'un changement de variable. Soit

$y_p^i, i \in I, p \in P$ la proportion du flot allant de l'input i au pool p . Ainsi, si le flot allant à p est non nul, on a $y_p^i = \frac{f_{ip}}{\sum_{o \in N_p^+} f_{po}}$. On remarque alors que pour tout $i \in I, p \in P$,

$$f_{ip} = y_p^i \sum_{o \in N_p^+} f_{po}.$$

Grâce à cette remarque, on a que (2.8), pour tout $p \in P$ vaut

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N_p^-} y_p^i \sum_{o \in N_p^+} f_{po} - \sum_{o \in N_p^+} f_{oj} &= 0, \\ \iff \sum_{i \in N_p^-} y_p^i &= 1. \end{aligned}$$

De plus, (2.9) se réécrit, pour tout $p \in P, k \in K$

$$w_p^k = \sum_{i \in N_p^-} q_i^k y_p^i,$$

et (2.10) se réécrit, pour tout $o \in O$, pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned} \sum_{p \in N_o^-} \sum_{i \in N_p^-} q_i^k y_p^i f_{po} - q_o^k \sum_{p \in N_o^-} f_{po} &\leq 0, \\ \iff \sum_{p \in N_o^-} \sum_{i \in N_p^-} q_i^k y_p^i f_{po} &\leq q_o^k \sum_{p \in N_o^-} f_{po}, \quad \forall o \in O, \forall k \in K. \end{aligned}$$

Ainsi, la q -formulation du problème de pooling est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{f,y} & \sum_{p \in P} \sum_{i \in N_p^-} \sum_{o \in N_p^+} c_{ip} y_p^i f_{po} \\ \text{s.à} & \sum_{p \in N_i^+} \sum_{o \in N_p^+} y_p^i f_{po} \leq b_i, \quad \forall i \in I, \\ & \sum_{o \in N_p^+} f_{po} \leq b_p, \quad \forall p \in P, \\ & \sum_{p \in N_o^-} f_{jo} \leq b_o, \quad \forall o \in O, \\ & \sum_{p \in N_o^-} \sum_{i \in N_p^-} q_i^k y_p^i f_{po} \leq q_o^k \sum_{p \in N_o^-} f_{po}, \quad \forall o \in O, \forall k \in K, \\ & \sum_{i \in N_p^-} y_p^i = 1, \quad \forall p \in P, \\ & f_{po} \geq 0, \quad \forall o \in O, \forall p \in N_o^-, \\ & 0 \leq y_p^i \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall i \in N_p^-. \end{array} \right. \quad (P_{q\text{-pooling}})$$

On remarquera que le problème (2.1) est formulé de cette manière. En effet, dans le cas de l'alimentation porcine, les *inputs* représentent les ingrédients, les *outputs* représentent les jours de la période de croissance et les *pools* représentent les deux mélanges utilisés. La variable x_{pi} de (2.1), pour tout $i \in I$, correspond à la proportion de l'ingrédient i allant dans le mélange p , et est donc la variable y_p^i du modèle $(P_{q-\text{pooling}})$. La variable y_{pj} de (2.1) correspond à la quantité du mélange p allant au jour j et est exactement la variable f_{pj} de $(P_{q-\text{pooling}})$. Le graphique représentant (2.1) sous la forme d'un problème de pooling est présenté figure 2.2.

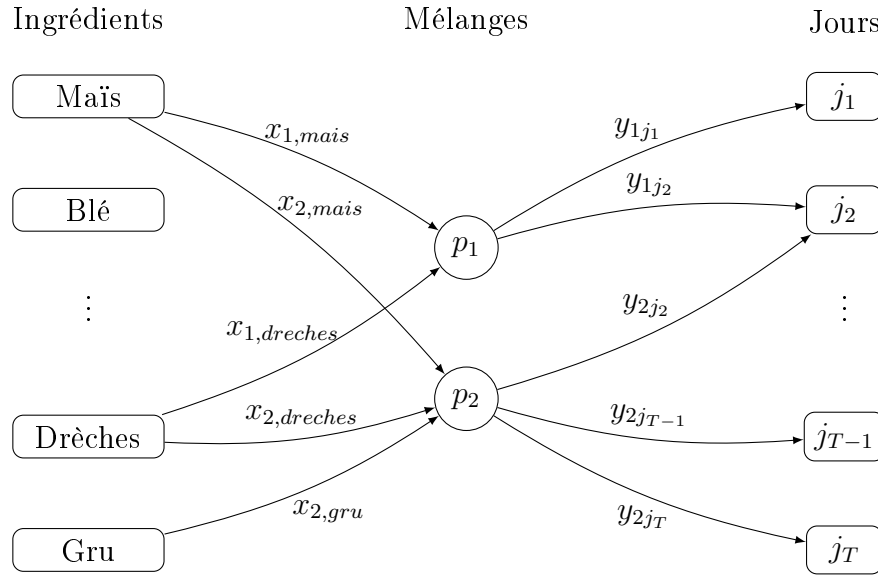


Figure 2.2 – Graphe représentant le problème de diète porcine sous la forme d'un problème de pooling.

Notons alors que l'ensemble des prédécesseurs d'un mélange p ne sont que des ingrédients, ainsi, $N_p^- = I$, quitte à ajouter des arcs de valeurs nulles lorsqu'ils ne sont pas présents. De même, les prédécesseurs de chaque jour j sont des mélanges p et donc $N_o^- = P$, les successeurs d'un mélange p sont uniquement des jours et donc $N_p^+ = O$, les successeurs d'un ingrédient i sont les mélanges et donc $N_i^+ = P$. De plus, comme la diète porcine ne contient que deux mélanges, nous avons $P = \{1, 2\}$ et le prix des ingrédients est le même pour $p = 1$ et $p = 2$, et $c_{i1} = c_{i2} = c_i$.

La fonction objectif de $(P_{q\text{-pooling}})$ peut alors se réécrire

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_i (y_1^i f_{1j} + y_2^i f_{2j}).$$

La contrainte

$$\sum_{p \in P \cap N_o^-} \sum_{i \in N_p^-} q_i^k y_p^i f_{po} \leq \sum_{p \in N_o^-} q_o^k f_{po}, \quad \forall o \in O, \forall k \in K,$$

est quant à elle donné par

$$\sum_{i \in I} q_i^k (y_1^i f_{1o} + y_2^i f_{2o}) \leq q_o^k (f_{1o} + f_{2o}), \quad \forall o \in O, \forall k \in K.$$

Dans le cas de l'alimentation porcine, la borne sur la qualité k n'est pas formulée en borne unitaire q_o^k , mais est une borne sur la quantité totale, que nous notons d_o^k , pour tout $k \in K$ et pour tout $o \in O$. La contrainte peut ainsi être réécrite sous la forme

$$\sum_{i \in I} q_i^k (y_1^i f_{1o} + y_2^i f_{2o}) \leq d_o^k, \quad \forall o \in O, \forall k \in K.$$

Ainsi, en regroupant les contraintes linéaires sous une unique matrice A , et en utilisant les contraintes et la fonction objectif que nous venons de décrire, nous pouvons réécrire $(P_{q\text{-pooling}})$ sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{f,y} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_i (y_1^i f_{1j} + y_2^i f_{2j}) \\ \text{s.à} & \sum_{i \in I} q_i^k (y_1^i f_{1o} + y_2^i f_{2o}) \leq d_o^k, \quad \forall o \in O, \forall k \in K, \\ & A \begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix} \leq b \\ & f_{jo} \geq 0, \quad \forall o \in O, \forall j \in N_o^-, \\ & 0 \leq y_p^i \leq 1, \quad \forall p \in P, \forall i \in N_p^-. \end{array} \right. \quad (P_{q\text{-pooling-pig}})$$

Sous cette forme, nous reconnaissons le problème de diète (2.1).

2.1.5 Complexité du problème

Après avoir introduit la formulation sous forme d'un problème de pooling pour énoncer un résultat sur la complexité. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4 *Le problème de pooling représentant la diète porcine ($P_{q\text{-pooling-pig}}$) est un problème fortement NP-difficile.*

Preuve. Le problème ($P_{q\text{-pooling-pig}}$) est un cas particulier du problème ($P_{q\text{-pooling}}$) qui lui-même est une réécriture de ($P_{p\text{-pooling}}$) suit à un changement de variable. Nous allons donc montrer que ($P_{p\text{-pooling}}$) est un problème fortement NP-difficile ce qui nous permettra d'en déduire que ($P_{q\text{-pooling-pig}}$) est lui-même fortement NP-difficile.

Pour démontrer que ($P_{p\text{-pooling}}$) est fortement NP-difficile, nous allons montrer que toute solution du problème de pooling est en fait un problème de recherche d'un ensemble de sommets indépendants de taille maximum qui est connu pour être un problème fortement NP-difficile [44].

Considérons le problème de pooling modélisé par ($P_{p\text{-pooling}}$).

On remarque ici qu'il n'est pas directement mentionné de borne inférieure sur les attributs de qualité, mais en introduisant de nouveaux attributs k' pour tout $k \in K$ et en posant $q_i^{k'} = -q_i^k$ on retrouve des bornes inférieures.

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V les sommets et E les arcs.

Définissons le problème de pooling P_G avec un graphe. On a alors $n = |V|$ inputs et outputs, 1 pool et $2n$ attributs de qualité. On peut alors écrire le $I = \{i_v : v \in V\}$, $O = \{o_v : v \in V\}$, $K = \{k_v^+ : v \in V\} \cup \{k_v^- : v \in V\}$ et $P = \{p\}$. L'ensemble des arcs du problème de pooling est donné par $A = (I \times P) \cup (P \times O)$. Les paramètres de qualité au nœud i_v est défini par

$$q_{i_v}^{k_u^+} = \begin{cases} 1, u = v \\ 0, u \neq v \end{cases} \quad \text{et} \quad q_{i_v}^{k_u^-} = \begin{cases} -1, u = v \\ 0, u \neq v \end{cases}$$

et les bornes au nœud o_v est défini par

$$q_{o_v}^{k_u^+} = \begin{cases} 0, \{u, v\} \in E \\ 1, \{u, v\} \notin E \end{cases} \quad \text{et} \quad q_{o_v}^{k_u^-} = \begin{cases} \frac{-1}{n}, \{u, v\} \in E \\ 0, \{u, v\} \notin E \end{cases}$$

Enfin, nous avons la capacité du pool p est $b_p = n$ et pour tout $i \in I$ et $o \in O$, on a $b_i = b_o = 1, c_{ip} = 0$ et $c_{po} = -1$. On en déduit que tout flot non nul est borné par n .

Il existe un flot non nul réalisable pour P_G . Notons f ce vecteur et w la matrice de qualité associée. Supposons que $f_{po_u} > 0$ et $f_{po_v} > 0$ pour $u, v \in V$. Puisque chaque *output* a p pour unique voisin, on a que $w_{o_u}^k = w_{o_v}^k = w_p^k$ pour tout $k \in K$. À cause de $w_{o_u}^{k_u^-} \leq q_{o_u}^{k_u^-} \leq 0$, on a que $w_p^{k_u^-} < 0$ et donc que $f_{o_u p} > 0$ car

$$w_p^{k_u^-} = \frac{\sum_{o \in O} q_o^{k_u^-} f_{op}}{\sum_{o \in O} f_{op}} = \frac{-f_{o_u p}}{\sum_{o \in O} f_{op}}.$$

De manière similaire, on a que $f_{po_v} > 0$ implique $f_{o_v p} > 0$ car

$$w_p^{k_v^+} = \frac{\sum_{o \in O} q_o^{k_v^+} f_{op}}{\sum_{o \in O} f_{op}} = \frac{f_{o_v p}}{\sum_{o \in O} f_{op}} > 0.$$

Puisque $0 < w_p^{k_v^+} = w_{o_v}^{k_v^+} \leq q_{o_v}^{k_v^+}$, on a par définition de $q_{o_v}^{k_v^+}$ que $\{u, v\} \notin E$. Ainsi, $\{v \in V : f_{po_v} > 0\}$ est un ensemble de sommets indépendants. De plus, comme on a $f_{po} \leq 1$ pour tout $o \in O$, on a également que

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} f_{ij} = - \sum_{o \in O} f_{po} \leq -|\{v \in V : f_{po_v} > 0\}|.$$

Inversement, supposons que $V' \subseteq V$ est un ensemble de sommets indépendants de G . En posant

$$f_{ivp} = f_{po_v} = \begin{cases} 1, v \in V' \\ 0, v \notin V', \end{cases}$$

on a, pour tout $v \in V'$, que

$$w_{o_v}^{k_u^+} = \begin{cases} \frac{1}{|V'|}, u \in V' \\ 0, u \notin V' \end{cases} \quad \text{et} \quad w_{o_v}^{k_u^-} = \begin{cases} \frac{-1}{|V'|}, u \in V' \\ 0, u \notin V' \end{cases}$$

Ainsi, $w_{o_v}^k \leq q_{o_v}^k$ pour tout $k \in K$ et f est réalisable pour P_G avec une valeur objectif

$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} f_{ij} = -|V'|$. Il suit que toute solution optimale de P_G est un problème de recherche d'un ensemble de sommets indépendants de taille maximum (ou *maximum independent vertex set* (MIVS) en anglais). Ainsi, il existe une réduction polynomiale du MIVS vers le problème de pooling avec tous les paramètres bornés par le nombre de nœuds du graphe et il est connu que le problème MIVS est fortement NP-difficile [44].

On a ainsi que le problème de pooling à un pool est fortement NP-difficile, et donc que le problème à plusieurs pools est fortement NP-difficile. ■

2.2 Analyse des solutions obtenues

Le modèle bilinéaire (2.1) que nous étudions a été implémenté en AMPL [41]. Une solution locale optimale pour chacune des instances typiques peut être calculée par n'importe quel solveur non linéaire. En utilisant le solveur Ipopt, nous obtenons une borne supérieure d'une valeur de 96.23 pour l'instance 1 et 68.99 pour l'instance 2.

2.2.1 Conjecture

Afin de déterminer d'éventuels autres minima à ce problème, nous avons résolu (2.1) avec le solveur Ipopt et 20 000 points de départ aléatoires. Les points initiaux (x_1, x_2, y_1, y_2) ont été générés aléatoirement selon la loi uniforme tels que

$$0 \leq x_1 \leq u_{x_1},$$

$$0 \leq x_2 \leq u_{x_2},$$

$$0 \leq y_1 \leq u_{y_1},$$

$$0 \leq y_2 \leq u_{y_2}.$$

Pour chaque instance, la solution calculée par le solveur avec chaque point initial est identique à celle que nous connaissions et a donc une valeur optimale de 96.23 pour l'instance 1 et 68.99 pour l'instance 2.

Cette expérimentation suggère qu'il existe un unique minimum à ce problème, qui est celui calculé par Ipopt. Ainsi, nous énonçons la conjecture suivante :

Conjecture 2.1 *Tout minimum local est un minimum global pour le problème bilinéaire de diète porcine appliqué aux instances considérées, définie en section 2.1.2.*

2.2.2 Problèmes géométriques

Pour certains problèmes non convexes, il est possible de déterminer une solution globale. C'est le cas de certains problèmes géométriques [23, 24]. Dans leur forme initiale, ces problèmes sont non convexes et non linéaires. Nous verrons à la fin de cette section qu'ils sont très proches du problème (2.1) auquel nous nous intéressons.

Définition 2.2 *Une fonction f telle que*

$$f(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, \quad (2.12)$$

*où $c > 0$ et $a_i \in \mathbb{R}$, est appelée **monôme**.*

Définition 2.3 *Une fonction f , somme de monômes, telle que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}}, \quad (2.13)$$

*où $c_k > 0$ et $a_{ik} \in \mathbb{R}$, est appelée **posynôme**.*

Un problème géométrique est défini par

$$\begin{cases} \min_x & f_0(x) \\ \text{s.à} & f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (2.14)$$

où f_0, \dots, f_m sont des posynômes et h_1, \dots, h_p sont des monômes.

Par un changement de variable, ce problème peut être transformé en un problème non linéaire convexe. Soit $y_i = \log x_i$. Ainsi, on a $x_i = e^{y_i}$.

Si h est un monôme, donné par la définition 2.2, tel que

$$h(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n},$$

alors, h exprimé en fonction de la nouvelle variable y est donné par

$$\begin{aligned} h(x) &= f(e^{y_1}, \dots, e^{y_n}), \\ &= ce^{y_1^{a_1}} \dots e^{y_n^{a_n}}, \\ &= e^{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + \log c}, \\ &= e^{a^t y + d}, \end{aligned}$$

où $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $d = \log c$. On remarque que cette fonction est alors l'exponentielle d'une fonction affine.

Si f est un posynôme, donné par la définition 2.3, tel que

$$f(x) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \dots x_n^{a_{nk}},$$

alors

$$f(x) = f(e^y) = \sum_{k=1}^K e^{a_k^t y + b_k},$$

où $a_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})$ et $b_k = \log c_k$. On remarque que cette fonction est alors la somme d'exponentielle d'une fonction affine.

Le problème (2.14) s'exprime, en fonction de la nouvelle variable y , de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_y & \sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^t y + b_{0k}} \\ \text{s.à} & \sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^t y + b_{ik}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & e^{a_i^t y + d_i} = 1, \quad i = 1, \dots, p. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On transforme maintenant la fonction objectif et les contraintes de ce problème en prenant le logarithme. On a alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_y & \tilde{f}_0(y) = \log \left(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^t y + b_{0k}} \right) \\ \text{s.à} & \tilde{f}_i(y) = \log \left(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^t y + b_{ik}} \right) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \tilde{h}_i(y) = a_i^t y + d_i = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On remarque alors que les contraintes \tilde{h}_i , pour $i \in \{1, \dots, p\}$, sont des fonctions linéaires, donc convexes, et que la fonction objectif et les contraintes \tilde{f}_i , pour $i \in \{0, \dots, n\}$, sont des fonctions log-sum-exp, qui sont convexes, souvent comparée à des softmax.

Le problème (2.16) ainsi obtenu est un problème d'optimisation convexe. Dans ce cas, tous les minima locaux sont des minima globaux. On peut donc facilement retrouver la solution globale de (2.14) en appliquant le changement de variable approprié.

La forme de ces problèmes est proche de (2.1). En effet, toutes les fonctions de notre problème, linéaires ou bilinéaires, ont des coefficients positifs et sont donc des posynômes. Ainsi, nous pouvons réécrire (2.1) sous la forme

$$\begin{cases} \min_x & f_0(x) \\ \text{s.à} & \underline{b} \leq f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ & h_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (2.17)$$

où les fonctions f_i , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, et h_j , pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, sont des posynômes.

Il y a beaucoup de similitudes entre (2.17) et (2.14), mais deux différences apparaissent. Dans (2.17), des contraintes d'inégalité de type "supérieur ou égal" et des contraintes d'égalité définie par des posynômes et a coefficients positifs sont présentes, ce qui nous empêche d'appliquer cette méthode. Si le problème ne contenait que des contraintes de type "inférieur ou égal", alors, nous pourrions facilement appliquer cette approche, et notre conjecture serait vérifiée.

2.2.3 Analyse d'un exemple de dimension réduite

Dans cette section, nous prouvons la conjecture 2.1 sur un exemple de très petite dimension ayant les mêmes caractéristiques que le problème de diète porcine, à savoir un objectif bilinéaire et des contraintes bilinéaires. Malgré sa petite taille, il comporte l'essentiel des difficultés.

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{x,y} & xy \\ \text{s.à} & 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 1, \\ & x + by + cxy \leq d, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

avec $b \geq 0$ et $c, d > 0$ On supposera de plus que $1 + b + c > d$. Ainsi, le point $(1,1)$ n'est pas réalisable pour ce problème.

Théorème 5 *Toute solution locale du problème (2.18) est une solution globale.*

Preuve. Notons dans un premier temps que les points $(0,0)$, $(0,y)$ et $(x,0)$ ne sont pas des maxima locaux, car la valeur objectif est alors nulle et si $x = y = \varepsilon$ suffisamment petit, alors $xy = \varepsilon^2 > 0$ et (x,y) est réalisable. Les variables x et y ne peuvent ainsi pas être nulles et on a le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & xy \\ \text{s.à} & 0 < x \leq 1, \\ & 0 < y \leq 1, \\ & x + by + cxy \leq d. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Le lagrangien associé est

$$\mathcal{L}(x, y, \mu, \eta, \lambda) = -xy + \mu(x - 1) + \eta(y - 1) + \lambda(x + by + cxy - d).$$

Les conditions d'optimalités de premier ordre sont données par les équations suivantes :

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \mu, \eta, \lambda) = \begin{pmatrix} -y + \mu + \lambda + \lambda cy \\ -x + \eta + \lambda b + \lambda cx \end{pmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

$$\mu, \eta, \lambda \geq 0, \quad (2.21)$$

$$\mu(x - 1) = 0, \quad (2.22)$$

$$\eta(y - 1) = 0, \quad (2.23)$$

$$\lambda(x + by + cxy - d) = 0. \quad (2.24)$$

Nous allons différencier les cas pour identifier toutes les solutions réalisables de (2.20)-(2.24).

- **Cas 1** : $\lambda = 0$ (impossible)

$$(2.20) \iff \begin{pmatrix} -y + \mu \\ -x + \eta \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y = \mu \\ x = \eta \end{cases}.$$

- **Cas 1.1** : $\mu = 0$ (équivalent par symétrie au cas $\eta = 0$)

On a alors $y = 0$. Par (2.23), on a $\eta = 0$ et donc $x = 0$.

Or, on a montré que le point $(0,0)$ n'est pas une solution optimale du problème.

- **Cas 1.2** : $\mu \neq 0$ (équivalent par symétrie au cas $\eta \neq 0$)

On a alors par (2.22) $x = 1$. Par conséquent $\eta = 1$ et par (2.23) $y = 1$.

Or, on a supposé $a + b + c > d$, donc le point $(1,1)$ n'est pas réalisable.

- **Cas 2** : $\lambda \neq 0$

$$(2.20) \iff \begin{cases} y = \frac{-\mu - \lambda}{c\lambda - 1} \\ x = \frac{-\eta - \lambda b}{c\lambda - 1} \end{cases}.$$

Comme $y > 0$ et $\mu, \lambda \geq 0$, on a $c\lambda - 1 \leq 0 \iff c \leq \frac{1}{\lambda}$.

- **Cas 2.1** : $\mu \neq 0$

En utilisant (2.22), on obtient $x = 1$, d'où on déduit

$$1 = x = \frac{-\eta - \lambda}{c\lambda - 1} \iff \eta = 1 - c\lambda - \lambda b.$$

- **Cas 2.1.1** : $\eta \neq 0$

Par (2.23), on a $y = 1$. Or le point $(1,1)$ n'est pas réalisable.

- **Cas 2.1.2** : $\eta = 0$

On a alors $\lambda = \frac{1}{b+c}$ et par (2.24),

$$1 + by + cy - d = 0,$$

$$\iff y(b + c) = d - 1,$$

$$\iff y = \frac{d - 1}{b + c}.$$

Cela est cohérent avec le fait que $1 + b + c > 1$.

— **Cas 2.2 :** $\mu = 0$

Dans ce cas, on a $y = \frac{-\lambda}{c\lambda-1} = \frac{1}{c} \left(-1 + \frac{1}{1-\lambda c} \right)$.

— **Cas 2.2.1 :** $\lambda = 1 - \lambda c$

Alors $y = 1$ et par (2.24), on a $x + b + cx = d \iff x = \frac{d-b}{c+1}$.

— **Cas 2.2.2 :** $\lambda \neq 1 - \lambda c$.

On a alors $y \neq 1$ donc par (2.23), on a $\eta = 0$.

On en déduit $x = \frac{-\lambda b}{c\lambda-1} = by$.

Par (2.24), on a $2by + bcy^2 - d = 0 \iff cy^2 + 2y - \frac{d}{b} = 0$, dont le déterminant s'écrit $\Delta = 4 + 4 \left(\frac{cd}{b} \right) = 4 \left(1 + \frac{cd}{b} \right)$.

Par conséquent, les solutions de ce cas sont :

- $y_1 = \frac{-2-2\sqrt{1+\frac{cd}{b}}}{2c} < 0$, qui n'est pas réalisable,
- $y_2 = \frac{-2+2\sqrt{1+\frac{cd}{b}}}{2c} = \frac{1}{c} \left(-1 + \sqrt{\frac{b+cd}{b}} \right)$.

Dans ce cas, on a $\frac{1}{1+\lambda c} = \sqrt{\frac{b+cd}{b}}$, d'où $\lambda = \frac{1-\sqrt{\frac{b}{b+cd}}}{c}$.

En conclusion, les solutions possibles pour ce problème sont

- $\left(1, \frac{d-1}{b+c} \right)$. Or, on a

$$\begin{aligned} y \leq 1 &\iff \frac{d-1}{b+c} \leq 1, \\ &\iff d-1 \leq b+c, \\ &\iff d \leq 1+b+c, \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

- $\left(\frac{d-b}{1+c}, 1 \right)$. De même que précédemment, on a

$$\begin{aligned} x \leq 1 &\iff \frac{d-b}{1+c} \leq 1, \\ &\iff d-b \leq 1+c, \\ &\iff d \leq 1+b+c, \end{aligned}$$

et la contradiction.

- $(\frac{b\lambda^*}{1-c\lambda^*}, \frac{\lambda^*}{1-c\lambda^*})$ avec $\lambda^* = \frac{1-\sqrt{\frac{b}{b+cd}}}{c}$ et $\mu^* = \eta^* = 0$ est finalement la seule solution à ce problème.

On a donc que $(x^*, y^*) = (\frac{b\lambda^*}{1-c\lambda^*}, \frac{\lambda^*}{1-c\lambda^*})$ avec $\lambda^* = \frac{1-\sqrt{\frac{b}{b+cd}}}{c}$ est le seul point stationnaire de ce problème.

Vérifions grâce aux conditions de second ordre que ce point est effectivement un maximum. Notons $g_1(x, y) = x - 1$, $g_2(x, y) = y - 1$ et $g_3(x, y) = x + by + cxy - d$ les contraintes du problème (2.18) et $\Lambda^* = (\mu^*, \eta^*, \lambda^*)$ les multiplicateurs associés. Soit $I^* = \{i : g_i(x^*, y^*) = 0\}$, $\hat{I} = \{i \in I^* : \Lambda_i^* > 0\}$ et $I_0^* = I^* \setminus \hat{I}$. Dans notre cas, en (x^*, y^*) , on a $I^* = \{3\}$, $\hat{I} = \{3\}$ et $I_0^* = \emptyset$. Rappelons également que $x^* = by^*$. Les conditions suffisantes d'optimalité de second ordre sont, pour tout $u = (u_1, u_2) \neq 0$

$$\nabla g_{\hat{I}} u = 0, \quad (2.25)$$

$$\nabla g_{I_0^*} u \leq 0, \quad (2.26)$$

$$u^t \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, y^*, \Lambda^*) u > 0. \quad (2.27)$$

L'équation (2.25) nous donne

$$\begin{aligned} \nabla g_{\hat{I}} u &= (1 + cy^*)u_1 + (b + cx^*)u_2, \\ &= (1 + cy^*)u_1 + (b + cby^*)u_2, \\ &= (1 + cy^*)(u_1 + bu_2). \end{aligned}$$

Comme $(1 + cy^*) > 0$, on a que

$$(u_1 + bu_2) = 0 \iff u_1 = -bu_2. \quad (2.28)$$

De plus, $u \neq 0$, donc on a que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$.

L'équation (2.27) nous donne

$$\begin{aligned}
u^t \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, y^*, \Lambda^*) u &= u^t \begin{pmatrix} 0 & -1 + \lambda^* c \\ -1 + \lambda^* c & 0 \end{pmatrix} u, \\
&= 2u_1 u_2 (-1 + \lambda^* c), \\
&= -2u_1 u_2 \sqrt{\frac{b}{b + cd}}, \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{\frac{b}{b + cd}} > 0$, on doit forcément avoir $u_1 u_2 < 0$. Ce qui est le cas d'après (2.28).

Donc $(x^*, y^*) = (\frac{b\lambda^*}{1 - c\lambda^*}, \frac{\lambda^*}{1 - c\lambda^*})$ avec $\lambda^* = \frac{1 - \sqrt{\frac{b}{b + cd}}}{c}$ est un maximum.

■

On peut également remarquer que la fonction $f(x, y) = xy$ est continue sur le domaine $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + by + cxy \leq b\}$ et que cet ensemble est un compact. Ainsi, f atteint son maximum et son minimum sur cet ensemble. Le minimum de f est 0, qui est atteint en $(0, 0)$ et en tout point de la forme $(x, 0)$ et $(0, y)$.

Cela nous amène à énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1 *La fonction $f(x, y) = xy$ définie sur le domaine $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + by + cxy \leq b\}$ possède un point stationnaire $(x, y) = (\frac{b\lambda}{1 - c\lambda}, \frac{\lambda}{1 - c\lambda})$ avec $\lambda = \frac{1 - \sqrt{\frac{b}{b + cd}}}{c}$ qui est un maximum et une infinité de minima atteints aux points de la forme $(x, 0)$ ou $(0, y)$.*

2.2.4 Le problème de réalisabilité

Revenons maintenant au problème bilinéaire appliqué à l'industrie porcine (2.1).

Une manière de déterminer une solution dont le coût optimal est strictement inférieur à celui de la solution locale connue consiste à utiliser les problèmes de réalisabilité.

Le but de ce genre de problème est de déterminer une solution dans l'ensemble réalisable

sans tenir compte de la fonction objectif. Par exemple, considérons le problème

$$\begin{cases} \min_x & f(x) \\ \text{s.à} & x \in S. \end{cases} \quad (2.29)$$

Soit x^* un optimum local de ce problème. En résolvant le problème

$$\begin{cases} \min_x & 0 \\ \text{s.à} & x \in S, \\ & f(x) \leq f(x^*) - \xi. \end{cases} \quad (2.30)$$

où $\xi > 0$, on cherche un point réalisable de S tel que la valeur de f en ce point soit strictement inférieure à $f(x^*)$. S'il existe une telle solution, alors le point x^* n'est qu'une solution locale.

En appliquant cette méthode à notre problème avec $\xi = 0.01$ sur les instances 1 et 2, le solveur Ipopt atteint son nombre maximum d'itérations sans avoir déterminé de point réalisable. Ce résultat soutient notre conjecture, mais ne signifie cependant pas que le problème n'a pas de solution réalisable. En effet, le solveur étant un solveur non linéaire, il ne garantit pas la résolution globale du problème. Il faudrait pour cela utiliser des solveurs globaux.

2.2.5 Résolution avec des solveurs globaux

Une solution globale à un problème non convexe peut être déterminée par des solveurs globaux tels que Couenne ou BARON. Comme nous le précisons précédemment, des solveurs non linéaires tels que Ipopt ou Knitro ne garantissent que des solutions locales.

Comme nous pouvons le constater avec le tableau 2.1, ni Couenne, ni BARON n'est capable de déterminer une solution globale optimale au problème (2.1) lorsque $|J| = 111$, et atteint la limite de temps de calcul fixée à 8 heures.

En réduisant considérablement la taille du problème ($|J| = 2, 3$ ou 4), plutôt que d'utiliser l'instance complète, Couenne n'est toujours pas capable de résoudre ces problèmes globalement, alors que BARON calcule une solution globale optimale pour $|J| = 2$ et $|J| = 3$. Aucun de ces solveurs n'est capable de gérer un problème de taille plus grande.

	$ I $	$ J $	Solveurs		
			Couenne	BARON	Ipopt
Instance 1	16	2	N/A	1.02	1.02
	16	3	N/A	1.54	1.54
	16	4	N/A	N/A	2.07
	16	111	N/A	N/A	96.23
Instance 2	18	2	N/A	0.80	0.80
	18	3	N/A	1.21	1.21
	18	4	N/A	N/A	1.62
	18	111	N/A	N/A	68.99

N/A : non disponible

Tableau 2.1 – Comparaison de la valeur optimale de solveurs globaux (Couenne, BARON) avec un solveur non linéaire (Ipopt).

On peut remarquer que la valeur de la solution globale optimale déterminée par BARON pour $|J| = 2$ et $|J| = 3$ sont égales, pour les deux instances que nous étudions, aux valeurs optimales de la solution locale déterminée par Ipopt.

Ainsi, ces résultats supportent notre conjecture car elle est vérifiée pour des problèmes de très petite taille.

2.2.6 Résolution du modèle "pooling"

Plusieurs méthodes de résolution pour les problèmes de pooling ont été développées [38]. Les premières méthodes peuvent s'apparenter à des techniques d'optimisation linéaire successives [12, 51, 74, 89]. Ces méthodes consistent à fixer alternativement les variables x et y du problème bilinéaire jusqu'à l'obtention d'un point fixe. Cette méthode présente un défaut, la solution dépend du point initial.

Des algorithmes utilisant la décomposition de Benders convergent vers l'optimum global et ont également été présentés [3]. Ces méthodes consistent à résoudre successivement un sous-problème et un problème maître. Ce dernier est souvent plus simple que le problème initial, mais ne fournit qu'une relaxation, et c'est au sous problème de générer des coupes valides jusqu'à l'obtention d'un problème équivalent au problème initial. Cette méthode a également

un inconvénient. Le problème maître étant souvent résolu par des méthodes de Branch and Bounds, il ne doit pas être de trop grande dimension.

Des techniques de relaxation ont également été introduites par McCormick dont nous verrons les détails en section 3.4.1.

Plus récemment, les techniques de Branch and Bounds ont été développées [40, 88] menant à l'élaboration du solveur BARON [87, 97], un solveur global d'optimisation. Ces méthodes ne sont cependant pas efficaces pour des problèmes de grande dimension tels que le nôtre.

Une étude en rapport avec la fabrication d'aliments [84] présente également un algorithme de Branch and Bound amélioré, mais ne converge pas toujours vers un optimum global dans un temps raisonnable.

Nous avons présenté, dans la section 2.1.4, deux formulations différentes pour un problème de pooling. Ces deux formulations sont équivalentes, mais peuvent être gérées de manières différentes par les solveurs d'optimisation. Les algorithmes de Branch and Bound étant déjà utilisés dans la section 2.1, nous ne présentons que la résolution numérique de la formulation sous forme de problème de pooling avec le solveur non linéaire Ipopt.

En modélisant notre problème de ces deux façons et en les résolvant, on constate que la p -formulation et la q -formulation retournent exactement la même solution, identique à celle que nous connaissions déjà, et cela pour chacune des deux instances typiques que nous considérons. Ces valeurs optimales sont de 96.23 pour l'instance 1 et de 68.99 pour l'instance 2.

Encore une fois, ces résultats soutiennent notre conjecture.

Conclusion

Le problème bilinéaire appliqué aux données de l'industrie porcine est un problème fortement NP-difficile. Nous pouvons le prouver en utilisant le problème de pooling.

Une solution de ce problème peut être calculée grâce à des solveurs non linéaires. Pour les deux instances que nous avons considérées, lorsqu'on résout le problème bilinéaire avec 20,000 points de départ aléatoires, la solution calculée est toujours la même. Cela nous a amené à énoncer la conjecture que toute solution locale de ce problème est une solution globale. Un exemple simple ayant les mêmes propriétés que nos instances permet de confirmer cette conjecture.

Le problème de réalisabilité associé et qui cherche une solution réalisable ayant un coût plus faible que la solution locale, ne converge pas, ce qui corrobore la conjecture. De plus, les solveurs globaux ne sont pas capables de calculer une solution pour le problème de pleine taille. En revanche, la solution calculée pour des problèmes de plus petite taille est cependant de valeur optimale égale à la solution locale.

CHAPITRE 3

Analyse par relaxation

Les méthodes usuelles de recherche d'optimum global présentées dans le chapitre 2 ne fonctionnent pas sur notre problème à cause de sa dimension. Nous devons donc utiliser d'autres approches. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur des techniques de relaxation. Ces approches nous permettent d'obtenir une borne inférieure à la valeur globale optimale. Dans toutes les expériences numériques que nous avons réalisées, nous avons utilisé le solveur Ipopt.

3.1 Approche par pénalisation

La première approche que nous présentons consiste à pénaliser les termes bilinéaires des contraintes dans la fonction objectif car l'essentiel des méthodes existantes ne présente pas de contraintes bilinéaires.

Considérons le problème bilinéaire général suivant :

$$\begin{cases} \min_{x,y} & f(x,y) \\ \text{s.à} & g(x,y) \leq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où f et g sont des fonctions bilinéaires.

	ξ	$f(x^*) + \xi \ z^* - x^*\ ^2$	$f(x^*)$	$\ x^* - x_{ipopt}^*\ _2$	$d(x^*, S)$
Instance 1	0,1	2.19	6.90e-05	612.91	8282.84
	1	21.93	4.55e-07	612.11	8282.84
	10	78.64	66.02	38.11	1848.93
	100	90.48	88.68	4.30	230.42
	1 000	93.86	92.90	4.26	69.19
	10 000	95.23	94.92	0.29	15.52
	100 000	95.89	95.58	0.59	3.84
	1 000 000	96.19	96.15	0.04	0.48
	10 000 000	96.23	96.22	0.004	0.09
	100 000 000	N/A	N/A	N/A	N/A
Instance 2	0,1	1.90	1.40e-05	769.21	8282.84
	1	19.00	1.01e-06	767.26	8282.84
	10	57.47	50.43	102.52	1383.02
	100	64.63	63.15	5.78	245.50
	1 000	67.68	66.91	0.35	75.85
	10 000	68.68	68.49	0.06	8.88
	100 000	68.91	68.86	0.008	1.29
	1 000 000	68.98	68.97	0.02	0.25
	10 000 000	68.99	68.98	8.20e-05	0.05
	100 000 000	N/A	N/A	N/A	N/A

Tableau 3.1 – Valeurs optimales du problème pénalisé et du problème initial, distance à la solution locale x_{ipopt}^* et distance à l'ensemble réalisable du problème initial ($d(x^*, S) = \|\max(0, \tilde{g}(x, y, z))\|$).

Nous introduisons alors une nouvelle variable z et nous remplaçons tous les termes bilinéaires de la forme xy par z . Nous pénalisons ensuite la distance entre z et xy dans l'objectif. Nous considérons donc maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} \min_{x,y,z} & f(x, y) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \xi \|z_{ij} - x_i y_j\|^2 \\ \text{s.à} & \tilde{g}(x, y, z) \leq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

où \tilde{g} est une fonction linéaire.

Plus ξ est grand, plus la solution de (3.2) sera proche de la solution du problème original (3.1).

Nous appliquons donc cette approche aux deux instances de notre problème d'alimentation porcine. Le tableau 3.1 regroupe les résultats. La troisième colonne de ce tableau présente

le coût de l'alimentation sans la pénalisation. On peut constater que cette valeur augmente jusqu'à atteindre une valeur proche de celles obtenues aux minima locaux (96.23 pour l'instance 1 et 68.99 pour l'instance 2). Lorsque ξ est grand, par exemple 10^8 , le solveur atteint le maximum d'itérations autorisé, fixé à 5000 et le point obtenu à la dernière itération retourne une valeur largement supérieure à celle en x_{ipopt} . Pour les autres valeurs de ξ , on peut voir que la solution du problème pénalisé est très proche de la solution du problème initial (colonne 4), avec une distance de 4×10^{-3} et 8.2×10^{-5} pour les instances 1 et 2 respectivement, en utilisant $\xi = 10^7$, mais reste non réalisable pour le problème initial. En effet, la distance à l'ensemble réalisable du problème initial (colonne 5) reste non nulle.

Nous pouvons remarquer que le problème (3.2) est un problème à objectif bilinéaire et à contraintes linéaires, semblable à (2.2). Les algorithmes développés pour résoudre ces problèmes sont, pour la plupart, des algorithmes de Branch and Bound et ne sont efficaces que sur des problèmes de petite taille, généralement une dizaine de variables et contraintes au maximum. Notre problème ayant plus de 250 variables et 2700 contraintes, nous ne pouvons pas appliquer ces méthodes pour résoudre ce problème.

Ces résultats soutiennent également notre conjecture.

3.2 Approche par discrétisation

Dans le problème bilinéaire initial (2.1), toutes les variables étaient considérées comme continues. Nous allons voir dans cette section qu'en discrétisant une des variables apparaissant dans les termes bilinéaires, nous obtenons un problème linéaire mixte en nombres entiers. Cette section a été inspirée par [83].

3.2.1 Vers un problème linéaire mixte en nombres entiers

Soient $0 \leq x_i \leq u_{x_i}$ et $0 \leq y_j \leq u_{y_j}$ deux variables impliquées dans un terme bilinéaire $x_i y_j$.

On discrétise alors en base 2 une de ces deux variables, par exemple y_i , de la manière suivante

$$y_i = u_{y_i} \sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk}, \quad (3.3)$$

où $\alpha_{jk} \in \{0, 1\}$ est une variable binaire et K est le taux d'échantillonnage. En utilisant (3.3), les termes bilinéaires s'écrivent

$$x_i y_j = x_i u_{y_j} \left(\sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk} \right) = u_{y_j} \sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk} x_i. \quad (3.4)$$

On peut voir de (3.4) que, pour le moment, ce terme est toujours bilinéaire. Cependant, en introduisant une nouvelle variable x_{ijk} telle que

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{jk} = 0, \\ x_i & \text{si } \alpha_{jk} = 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Un terme bilinéaire s'écrit maintenant

$$x_i y_j = u_{y_j} \sum_{k=0}^K 2^{-k} x_{ijk}, \quad (3.6)$$

qui est linéaire en x_{ijk} .

Une telle variable est définie grâce à quatre équations :

$$x_{ijk} \geq 0, \quad (3.7)$$

$$x_{ijk} - x_i \leq 0, \quad (3.8)$$

$$-x_{ijk} + x_i - u_{x_i}(1 - \alpha_{jk}) \leq 0, \quad (3.9)$$

$$x_{ijk} - u_{x_i} \alpha_{jk} \leq 0. \quad (3.10)$$

En remplaçant chaque terme bilinéaire de (2.1) par une nouvelle variable définie par les équations (3.7) - (3.10), le problème devient alors un problème linéaire mixte en nombres entiers (MILP).

Cette approche appliquée au modèle (2.1) donne le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x_1, x_2, y_1, y_2, x^1, x^2, \alpha, \beta} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} q_i^0 2^{-k} (u_{y_1} x_{ijk}^1 + u_{y_2} x_{ijk}^2) \\ \text{s.à} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} 2^{-k} q_i^p (u_{y_1} x_{ijk}^1 + u_{y_2} x_{ijk}^2) \leq \bar{d}_j^p, \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_1} \\ u_{y_2} \end{pmatrix}, \\ & x_{ijk}^1 \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^1 - x_{1i} \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & -x_{ijk}^1 + x_{1i} - u_{x_1}(1 - \alpha_{jk}) \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^1 - u_{x_1} \alpha_{jk} \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 - x_{2i} \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & -x_{ijk}^2 + x_{2i} - u_{x_2}(1 - \beta_{jk}) \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 - u_{x_2} \beta_{jk} \leq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & \alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, \forall k \in K. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Ce problème peut être résolu globalement par des solveurs linéaires mixtes en nombres entiers. La solution obtenue sera une solution approchée de la solution du problème continu (2.1).

Nous avons réalisé cette implémentation en AMPL et nous avons utilisé le solveur CPLEX 12.6 pour le résoudre.

Afin de tester cette méthode, nous avons commencé par résoudre des problèmes de petite dimension en prenant $|J| = 2$ et $|K| = 4$, tandis que $|I|$ et $|P|$ restent inchangés. Nous avons ensuite augmenté progressivement la valeur de $|J|$. Le tableau 3.2 regroupe les résultats pour des valeurs de $|J|$ allant de 2 à 7 pour chacune des instances typiques.

On peut remarquer que les valeurs optimales de (2.1) et (3.11) sont identiques quelque soit la

	$ J $	problème (2.1)		problème (3.11)	
		obj. value	CPU time	obj. value	CPU time
Instance 1	2	1.02	0.162931	1.02	5.63164
	3	1.54	0.122153	1.54	79.3265
	4	2.07	0.437493	2.07	714.843
	5	2.61	0.180731	2.61	3,832.76
	6	3.16	0.339369	3.16	30,988.7
	7	3.71	0.478266	3.71	433,168
Instance 2	2	0.80	0.180719	0.80	4.06898
	3	1.21	0.330983	1.21	52.966
	4	1.62	0.171164	1.62	286.031
	5	2.04	0.433399	2.04	2,079.33
	6	2.47	0.389787	2.47	11,210.5
	7	2.90	0.706067	2.90	278,021

Tableau 3.2 – Valeur optimale du problème bilinéaire solveur Ipopt) et du modèle discrétisé (solveur CPLEX) ainsi que le temps CPU (en seconde).

taille du problème. Cependant, si on regarde le temps de résolution de CPLEX pour résoudre (3.11), on remarque sa croissance exponentielle. Ce temps est décuplé à chaque fois que $|J|$ est augmenté de 1.

Dans le problème initial, $|J| = 111$. Ainsi, il faudrait environ 10^{100} ans pour résoudre le problème discrétisé en entier. Utiliser l'approche discrète semblait une bonne idée de prime abord, mais la dimension de notre problème et les algorithmes de Branch and Bound utilisés pour résoudre les MILPs ne sont pas adaptés à notre cas.

Les algorithmes de Branch and Bound calculent successivement des bornes inférieures et supérieures à la solution globale du problème. Après 30 minutes de calcul sur le problème entier (instances 1 et 2), la borne inférieure déterminée par CPLEX était toujours inférieure à celle que nous connaissions déjà et ne l'améliore donc pas.

Le même comportement est à noter lorsque les variables x_1 et x_2 sont discrétisées à la place de y_1 et y_2 , mais nous ne présentons pas les résultats ici.

Cette approche nous montre que, pour des problèmes de taille réduite, la conjecture est vérifiée. Elle la soutient donc pour le problème entier.

3.2.2 Relaxation continue du MILP

La relaxation continue d'un problème discret fournit une borne inférieure à la solution discrète. En appliquant cette relaxation à un problème linéaire mixte en nombres entiers, nous obtenons un problème linéaire avec des variables continues, facilement résoluble et nous sommes assurés d'obtenir un minimum global de ce problème. Nous réalisons cette relaxation sur le problème (3.11).

Après résolution, la solution optimale de ce problème est de 94.18 pour l'instance 1 et de 66.16 pour l'instance 2. Ces valeurs sont inférieures aux bornes inférieures que nous connaissions déjà et qui étaient de 94.84 et 67.23 respectivement.

3.3 Relaxation lagrangienne

La relaxation lagrangienne d'un problème permet également d'obtenir une borne inférieure au problème initial.

De manière générale, soit

$$\begin{cases} \min_x & f(x) \\ \text{s.à} & g(x) \leq 0, \\ & x \in S, \end{cases} \quad (3.12)$$

un problème d'optimisation. Le lagrangien de ce problème est défini par

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x). \quad (3.13)$$

Ainsi, la fonction duale de (3.12) est donnée par

$$h(\lambda) = \inf_{x \in S} \mathcal{L}(x, \lambda). \quad (3.14)$$

Nous nous intéressons dans cette section au saut de dualité, c'est-à-dire la différence entre la valeur optimale duale et la valeur optimale primale. Si ce saut est nul, cela signifie que la solution primale est une solution globale. Sinon, on étudiera la valeur duale. Si elle est

supérieure à la borne inférieure que nous connaissons déjà, et donc l'améliore, cela nous donnera des informations sur la solution globale optimale du problème initial.

Pour rappel, les bornes inférieures de nos instances sont données par le problème (1.14).

3.3.1 Algorithme du sous-gradient

Soit λ^* et x^* les optimum dual et primal, nous savons que $h(\lambda^*) = \max_{\lambda} h(\lambda) \leq f(x^*)$, mais cette valeur peut être difficile à calculer. Nous utilisons donc un algorithme de sous-gradient pour calculer une valeur approchée de $\mathcal{L}(\lambda^*)$. L'algorithme est décrit ci-dessous.

Algorithme 1: Algorithme du sous-gradient

```

Soit  $\lambda_0, N > 0$ ;
for  $k = 0 : N$  do
    Calculer  $x_k^* \in \arg \min_x \mathcal{L}(x, \lambda_k)$ ;
    Soit  $g(x_k^*)$  un sous-gradient de  $\mathcal{L}(x_k^*, \lambda_k)$ ;
    Évaluer le pas  $\alpha_k$ ;
     $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k g(x_k^*)$ ;

```

Plusieurs stratégies peuvent être considérées pour mettre à jour le pas α_k . Nous en avons utilisé trois différentes :

- un pas fixe, dans notre cas, $\alpha_k = 1$,
- pas décroissant non sommable, qui satisfait $\alpha_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$, dans notre cas $\alpha_k = 1/k$,
- un pas dynamique, donnée par $\alpha_k = \frac{\mathcal{L}(x_k, \lambda) - \mathcal{L}_k^{\text{eval}}}{\|g(x_k^*)\|}$, où $\mathcal{L}_k^{\text{eval}}$ est un estimé de la valeur optimale $\mathcal{L}(\lambda^*)$. Nous avons également calculé $\mathcal{L}_k^{\text{lev}}$ de deux manières différentes, soit $\mathcal{L}_k^{\text{eval}} = \max_{0 \leq i \leq k} \mathcal{L}(x_i^*, \lambda_i)$, $\delta > 0$, soit $\mathcal{L}_k^{\text{eval}} = f(x^*)$, quand la solution du problème primal est connue.

3.3.2 Relaxation lagrangienne du MILP

Nous considérons ici la relaxation lagrangienne du MILP dans laquelle toutes les contraintes difficiles ont été relaxées. Nous réalisons toutes les stratégies présentées précédemment avec les paramètres $\lambda_0 = 0$, $N = 150$ et $\delta = 1$ si nécessaires. La valeur maximale de la fonction duale que nous avons obtenue est de 70.87 pour l'instance 1 et 48.96 pour l'instance 2, soit des valeurs très inférieures aux bornes inférieures que nous connaissons.

Une discrétisation du problème (1.14) peut être réalisée, basée sur l'approche présentée dans la section 3.2. Sa valeur optimale peut être obtenue facilement car, contrairement au problème (3.11), ce problème est séparable en $|J|$ petits problèmes. Les valeurs optimales de ce problème sont de 95.14 pour l'instance 1 et de 67.71 pour l'instance 2. Elles peuvent être considérées comme des bornes inférieures du problème (3.11). Quelle que soit l'instance considérée, l'algorithme de sous-gradient appliqué au problème discret ne fournit pas de meilleurs résultats.

3.3.3 Relaxation lagrangienne du problème bilinéaire

Nous appliquons également l'approche de relaxation lagrangienne au problème continu. Nous relaxons toutes les contraintes bilinéaires.

Dans un premier temps, nous résolvons le problème primal en utilisant le solveur Ipopt et nous obtenons une solution locale x_0^* . Soient λ_0^* les multiplicateurs de Lagrange associés à x_0^* .

Comparons $f(x_0^*)$ et $h(\lambda_0^*)$. Pour l'instance 1, nous obtenons les valeurs $f(x_0^*) = 96.23$ et $h(\lambda_0^*) = 54.26$ respectivement. Le saut de dualité est alors de 41.97. Nous constatons le même comportement pour l'instance 2 avec $f(x_0^*) = 68.99$ et $h(\lambda_0^*) = 24.66$. Le saut de dualité pour cette instance est de 44.33.

Le but de l'algorithme de sous-gradient est de réduire ce saut de dualité. Nous l'appliquons avec $\lambda_0 = \lambda_0^*$, $N = 50000$ et $\delta = \max(1/k, 10^{-4})$ si nécessaire. La meilleure valeur de fonction

		borne inf. of f	$f(x_0^*)$	$\max_{0 \leq k \leq N} \mathcal{L}(x_k^*, \lambda_k)$
Instance 1	MILP	95.18	N/A	70.87
	Continu	94.84	96.23	78.43
Instance 2	MILP	67.71	N/A	48.96
	Continu	67.23	68.99	46.64

Tableau 3.3 – Résumé des différents résultats de relaxation lagrangienne.

duale que nous obtenons, toutes stratégies confondues, est de 78.43 pour l'instance 1, soit un saut de dualité de 17.8, et de 46.64 pour l'instance 2, soit un saut de dualité de 22.35.

Dans les deux cas, ces valeurs sont inférieures à la valeur optimale de (1.14) qui est la borne inférieure que nous connaissons.

Afin de simplifier la lecture, nous avons regroupé dans le tableau 3.3 les différentes bornes inférieures et supérieures que nous connaissons et les meilleures valeurs de la relaxation, pour les problèmes MILP ou continu et pour chacune des instances.

3.4 Relaxations convexes

Cette section sera consacrée à la présentation de trois relaxations convexes que nous avons utilisées pour obtenir une borne inférieure à la solution optimale du problème bilinéaire (2.1). Nous présentons la relaxation de McCormick, la relaxation de Tawarmalani *et al.* et la relaxation semi-définie positive.

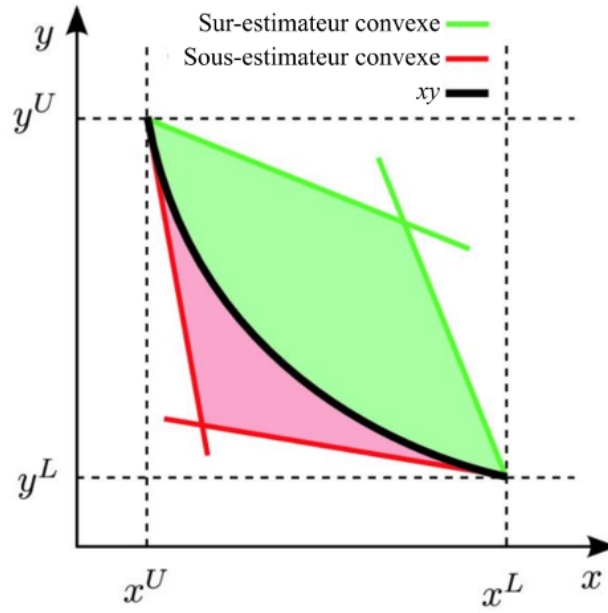


Figure 3.1 – Représentation graphique de l’enveloppe de McCormick pour un terme bilinéaire.

3.4.1 Relaxation convexe de McCormick

La première relaxation convexe que nous introduisons est également la plus connue et est largement utilisée en optimisation. McCormick [67] l’a introduite en 1976. Elle fournit une relaxation linéaire du problème initial en utilisant uniquement les variables bornées. Elle fournit deux sous-estimateurs et deux sur-estimateurs de chaque terme bilinéaire (Figure 3.1).

Le principe est le suivant. Soit x_i et y_j deux variables apparaissant dans un terme bilinéaire et telle que

$$l_{x_i} \leq x_i \leq u_{x_i}, \quad (3.15)$$

$$l_{y_j} \leq y_j \leq u_{y_j}. \quad (3.16)$$

Des inégalités précédentes, nous pouvons déduire les quatre équations suivantes définissant

les deux sous-estimateurs et les deux sur-estimateurs :

$$\begin{cases} (x_i - l_{x_i})(y_j - l_{y_j}) \geq 0, \\ (x_i - l_{x_i})(u_{y_j} - y_j) \geq 0, \\ (u_{x_i} - x_i)(y_j - l_{y_j}) \geq 0, \\ (u_{x_i} - x_i)(u_{y_j} - y_j) \geq 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\iff \begin{cases} x_i y_j - x_i l_{y_j} - y_j l_{x_i} + l_{x_i} l_{y_j} \geq 0, \\ x_i u_{y_j} - x_i y_j - l_{x_i} u_{y_j} + y_j l_{x_i} \geq 0, \\ y_j u_{x_i} - u_{x_i} l_{y_j} - x_i y_j + x_i l_{y_j} \geq 0, \\ u_{x_i} u_{y_j} - y_j u_{x_i} - x_i u_{y_j} + x_i y_j \geq 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Introduisons maintenant une nouvelle variable z_{ij} telle que $z_{ij} = x_i y_j$. On remplace ensuite dans le système (3.18) chaque terme bilinéaire par z_{ij} , ce qui nous donne

$$\begin{cases} z_{ij} - x_i l_{y_j} - y_j l_{x_i} + l_{x_i} l_{y_j} \geq 0, \\ x_i u_{y_j} - z_{ij} - l_{x_i} u_{y_j} + y_j l_{x_i} \geq 0, \\ y_j u_{x_i} - u_{x_i} l_{y_j} - z_{ij} + x_i l_{y_j} \geq 0, \\ u_{x_i} u_{y_j} - y_j u_{x_i} - x_i u_{y_j} + z_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) est alors linéaire en fonction des variables x_i, y_j et z_{ij} .

Ainsi, une relaxation linéaire et convexe du problème (2.1) peut être fournie en remplaçant chaque terme bilinéaire $x_i y_j$ par une nouvelle variable z_{ij} et en ajoutant aux contraintes les quatre équations du système (3.19) pour chaque nouvelle variable.

Dans le problème (2.1), les termes bilinéaires apparaissent sous la forme $x_{ti} y_{tj}, i \in I, j \in J$ et $t \in \{1, 2\}$. Les variables x_1 et x_2 ne sont jamais simultanément dans le même terme bilinéaire, tout comme y_1 et y_2 , x_1 et y_2 , et x_2 et y_1 .

Posons $x_{1ij} = x_{1i} y_{1j}$ et $x_{2ij} = x_{2i} y_{2j}$. En appliquant la relaxation de McCormick au problème (2.1), nous obtenons le modèle suivant

$$\begin{aligned}
(P_{MC}) \left\{ \begin{aligned}
& \min_{x,y} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 (x_{1ij} + x_{2ij}) & (3.20) \\
& \text{s.à } \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (x_{1ij} + x_{2ij}) \leq \overline{d}_j^p, & \forall p \in P, \forall j \in J, & (3.21) \\
& \sum_{i \in I} x_{1ij} = y_{1j}, & \forall j \in J, & (3.22) \\
& \sum_{i \in I} x_{2ij} = y_{2j}, & \forall j \in J, & (3.23) \\
& \sum_{i \in I} x_{1ij} + x_{2ij} \leq X_j^{\max}, & \forall j \in J & (3.24) \\
& 0 \leq x_1 \leq u_x, & (3.25) \\
& 0 \leq x_2 \leq u_x, & (3.26) \\
& 0 \leq y_1 \leq u_y, & (3.27) \\
& 0 \leq y_2 \leq u_y, & (3.28) \\
& x_{1ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.29) \\
& u_{y_j} x_{1i} - x_{1ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.30) \\
& u_{x_i} y_{1j} - x_{1ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.31) \\
& u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} y_{1j} - u_{y_j} x_{1i} + x_{1ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.32) \\
& x_{2ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.33) \\
& u_{y_j} x_{2i} - x_{2ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.34) \\
& u_{x_i} y_{2j} - x_{2ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J, & (3.35) \\
& u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} y_{2j} - u_{y_j} x_{2i} + x_{2ij} \geq 0, & \forall i \in I, \forall j \in J. & (3.36)
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que ce problème est linéaire et peut ainsi être facilement résolu par n'importe quel solveur linéaire. Nous utilisons CPLEX et la modélisation a été réalisée en AMPL.

La valeur optimale de ce problème est inférieure à la borne inférieure déjà connue, pour chacune des instances que nous considérons. Cependant, nous pouvons améliorer ce modèle en ajoutant des inégalités valides.

Les contraintes

$$y_{1j} + y_{2j} \leq w_j, \quad \forall j \in J, \quad (3.37)$$

$$\sum_{i \in I} x_{1i} = 1, \quad (3.38)$$

$$\sum_{i \in I} x_{2i} = 1, \quad (3.39)$$

apparaissent dans le problème initial (2.1) en tant que contraintes linéaires. En multipliant (3.38) par y_{1j} et (3.39) par y_{2j} , nous obtenons les équations suivantes

$$\sum_{i \in I} x_{1i} y_{1j} = y_{1j}, \quad (3.40)$$

$$\sum_{i \in I} x_{2i} y_{2j} = y_{2j}. \quad (3.41)$$

On utilise alors la substitution $x_{1ij} = x_{1i} y_{1j}$ et $x_{2ij} = x_{2i} y_{2j}$ et on obtient

$$\sum_{i \in I} x_{1ij} = y_{1j}, \quad (3.42)$$

$$\sum_{i \in I} x_{2ij} = y_{2j}. \quad (3.43)$$

Ainsi, en utilisant (3.42) et (3.43) pour remplacer les variables y_{1j} et y_{2j} de (3.37), on a :

$$y_{1j} + y_{2j} = \sum_{i \in I} x_{1ij} + x_{2ij} \leq w_j. \quad (3.44)$$

Les équations (3.42), (3.43) et (3.44) ne sont que des inégalités valides et ne modifient en rien l'ensemble réalisable du problème initial.

C'est effectivement le cas et nous obtenons des valeurs optimales de 94.84 pour l'instance 1 et 67.23 pour l'instance 2. Remarquons alors que ces valeurs sont égales aux valeurs optimales du modèle idéal (1.14) appliqué à chaque instance.

Cela tend à confirmer notre conjecture.

Dans le cas de la diète porcine, nous avons la particularité que $W^{\max} = u_y$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 Soit $x^* = (x_{ij}^*)$ une solution optimale de (P_{ideal}) . Soit $(x_{1ij}, x_{2ij}) \geq 0$ une décomposition de x_{ij}^* telle que $x_{1ij} \leq u_{x_i} \sum_{i \in I} x_{1ij}$ et $x_{2ij} \leq u_{x_i} \sum_{i \in I} x_{2ij}$. Si, pour tout $i \in I$, il existe x_{1i} et x_{2i} tels que

$$\max_{j \in J} \frac{x_{1ij}}{u_{y_j}} \leq x_{1i} \leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}}, \quad (3.45)$$

$$\max_{j \in J} \frac{x_{2ij}}{u_{y_j}} \leq x_{2i} \leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}, \quad (3.46)$$

alors $(x_{1ij}, x_{2ij}, x_1, x_2, y_1, y_2)$, avec $y_{1j} = \sum_{i \in I} x_{1ij}$ et $y_{2j} = \sum_{i \in I} x_{2ij}$, est une solution de (P_{MC}) et on a que $v_{ideal}^* = v_{MC}^*$ avec v_{ideal}^* et v_{MC}^* les valeurs optimales de (P_{ideal}) et (P_{MC}) respectivement.

Preuve. Nous allons dans un premier temps montrer qu'une solution de (P_{ideal}) vérifiant les hypothèses du théorème est un point réalisable de (P_{MC}) . Nous montrerons ensuite que de toute solution de (P_{MC}) nous pouvons extraire un point réalisable de (P_{ideal}) .

Rappelons que le problème idéal s'exprime de manière développée par le modèle suivant :

$$(P_{ideal}) \begin{cases} \min_z \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 z_{ij} & (3.47) \\ \text{s.à} \quad \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p z_{ij} \leq \bar{d}_j^p, & \forall j \in J, \forall p \in P, & (3.48) \\ \sum_{i \in I} z_{ij} \leq u_{y_j}, & \forall j \in J, & (3.49) \\ 0 \leq z_{ij} \leq u_{x_i} \sum_{i \in I} z_{ij}, & \forall j \in J. & (3.50) \end{cases}$$

Soit $x^* = (x_{ij}^*)_{i \in I, j \in J}$ une solution de (P_{ideal}) . Posons

$$x_{ij}^* = x_{1ij} + x_{2ij}. \quad (3.51)$$

Vérifions que les contraintes de (P_{MC}) sont satisfaites.

— on a directement (3.21) par (3.48)

— on a par (3.49)

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} x_{ij}^* &\leq u_{y_j}, \\ \sum_{i \in I} x_{1ij} + x_{2ij} &\leq u_{y_j},\end{aligned}$$

donc (3.24) est satisfaite.

— (3.29) et (3.33) sont vérifiées par définition.

Posons $y_{1j} = \sum_{i \in I} x_{1ij}$ et $y_{2j} = \sum_{i \in I} x_{2ij}$.

— (3.22) et (3.23) sont vérifiées par définition

— les contraintes (3.27) et (3.28) sont vérifiées. En effet, on sait que (3.24) est satisfait d'où

$$\sum_{i \in I} x_{1ij} + x_{2ij} \leq u_{y_j} \iff y_{1j} + y_{2j} \leq u_{y_j}.$$

De plus par définition, on a que $x_{1ij} \geq 0$ et $x_{2ij} \geq 0$ d'où $y_{1j} = \sum_{i \in I} x_{1ij} \geq 0$ et $y_{2j} = \sum_{i \in I} x_{2ij} \geq 0$.

— par définition de x_{1ij} et x_{2ij} on a directement que les contraintes (3.30) et (3.34) qui sont vérifiées.

Supposons donc maintenant qu'il existe x_{1i} et x_{2i} tels que

$$\max_{j \in J} \frac{x_{1ij}}{u_{y_j}} \leq x_{1i} \leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}}, \quad (3.52)$$

$$\max_{j \in J} \frac{x_{2ij}}{u_{y_j}} \leq x_{2i} \leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}. \quad (3.53)$$

On a alors

— (3.32) et (3.36) sont vérifiées car

$$\begin{aligned}
x_{1i} &\leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}} \\
\iff x_{1i} &\leq \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}}, \\
\iff x_{1i} u_{y_j} &\leq u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}, \\
\iff (3.32),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x_{2i} &\leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}} \\
\iff x_{2i} &\leq \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}, \\
\iff x_{2i} u_{y_j} &\leq u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}, \\
\iff (3.36).
\end{aligned}$$

— (3.26) et (3.27) sont satisfaites. On a

$$x_{1i} \geq \max_{j \in J} \frac{x_{1ij}}{u_{y_j}} \geq 0$$

et

$$x_{2i} \geq \max_{j \in J} \frac{x_{2ij}}{u_{y_j}} \geq 0$$

car $x_{1ij}, x_{2ij}, u_{y_j} \geq 0$. On a de plus

$$\begin{aligned}
x_{1i} &\leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}}, \\
&\leq \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}}, \\
&\leq u_{x_i} + \frac{-u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij}}{u_{y_j}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x_{2i} &\leq \min_{j \in J} \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}, \\
&\leq \frac{u_{x_i} u_{y_j} - u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}, \\
&\leq u_{x_i} + \frac{-u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij}}{u_{y_j}}.
\end{aligned}$$

Or, par définition, on a $-u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{1ij} \right) + x_{1ij} \leq 0$, $-u_{x_i} \left(\sum_{i \in I} x_{2ij} \right) + x_{2ij} \leq 0$ et $u_{y_j} \geq 0$ d'où $x_{1i} \leq u_{x_i}$ et $x_{2i} \leq u_{x_i}$.

— (3.30) et (3.34) sont également satisfaites car

$$\begin{aligned}
&\max_{j \in J} \frac{x_{1ij}}{u_{y_j}} \leq x_{1i}, \\
&\iff \frac{x_{1ij}}{u_{y_j}} \leq x_{1i}, \\
&\iff (3.30),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\max_{j \in J} \frac{x_{2ij}}{u_{y_j}} \leq x_{2i}, \\
&\iff \frac{x_{2ij}}{u_{y_j}} \leq x_{2i}, \\
&\iff (3.34).
\end{aligned}$$

Ainsi, les contraintes (3.21)–(3.36) sont satisfaites. On a donc que $(x_{1ij}, x_{2ij}, x_1, x_2, y_1, y_2)$ est une solution réalisable de (P_{MC}) .

De plus, on a facilement que toute solution de (P_{MC}) est une solution réalisable de (P_{ideal}) . En effet, soit $(x_{1ij}^*, x_{2ij}^*, x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ une solution de (P_{MC}) . Posons $X_{ij} = x_{1ij}^* + x_{2ij}^*$. On a alors

— (3.48) est satisfaite car

$$\begin{aligned} (3.21) &\iff \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (x_{1ij}^* + x_{2ij}^*) \leq \bar{d}_j^p, \\ &\Rightarrow \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (X_{ij}) \leq \bar{d}_j^p, \\ &\Rightarrow (3.48). \end{aligned}$$

— (3.49) est satisfaite car

$$\begin{aligned} (3.24) &\iff \sum_{i \in I} x_{1ij}^* + x_{2ij}^* \leq u_{y_j}, \\ &\Rightarrow \sum_{i \in I} X_{ij} \leq u_{y_j}, \\ &\Rightarrow (3.49). \end{aligned}$$

— (3.50) est satisfaite car $x_{1ij}^* \geq 0$ et $x_{2ij}^* \geq 0$ d'où $X_{ij} = x_{1ij}^* + x_{2ij}^* \geq 0$. De plus, par

(3.49), on a que $\sum_{i \in I} X_{ij} \leq u_{y_j}$ donc $X_{ij} \leq u_{y_j}$ pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$.

On a ainsi que toute solution de (P_{MC}) est un point réalisable de (P_{ideal}) .

■

Dans ce théorème, la décomposition $x_{ij}^* = x_{1ij} + x_{2ij}$ permet en réalité de se ramener à un cas à deux mélanges. Les contraintes $x_{tij} \leq u_{x_i} \sum_{i \in I} x_{tij}$ pour tout $t \in \{1, 2\}$ permettent de s'assurer que la proportion maximale de chaque ingrédient du mélange est respectée.

Toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites pour nos deux instances.

3.4.2 Relaxation convexe de Tawarmalani *et al.*

Plus récemment, Tawarmalani *et al.* [96] énoncèrent un nouveau résultat à propos de l'enveloppe convexe d'un ensemble bilinéaire.

Théorème 6 Soit $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n (a_i x_i y_i + b_i x_i + c_i y_i) \geq r \right\}$, où, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, a_i, b_i et c_i sont non négatifs et r est positif. Soit

$$\eta_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \left(b_i x_i + c_i y_i + \sqrt{(b_i x_i + c_i y_i)^2 + 4a_i r x_i y_i} \right).$$

Alors, l'enveloppe convexe de B est donnée par

$$\text{conv}(B) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i, y_i) \geq r \right\}.$$

Pour la preuve de ce théorème, nous avons besoins de différentes définitions et propriétés. Nous les introduisons ici afin de rendre la preuve plus lisible.

Définition 3.2 Soit $S_i \subseteq S$, pour $i \in N = \{1, \dots, n\}$. On dit que S a une **propriété d'extension convexe** pour les ensembles disjoints S_i si pour tout $z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) \in S_i$ alors $z_j = 0$ pour tout $j \neq i$ et si chaque point $z \in S$ peut s'exprimer comme une combinaison convexe de points $\xi_i \in \text{cl conv}(S_i)$ et d'une combinaison de rayon $\psi_i \in C^\infty(\text{cl conv}(S_i))$, où $C^\infty(S)$ est le cône de récession de S . En d'autres termes, $\forall i \in I \subseteq N$, il existe $\lambda_i \geq 0$ et $\mu_i \geq 0$ qui satisfont $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ et tels que

$$z = \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i + \sum_{i \in I} \mu_i \psi_i. \quad (3.54)$$

Définition 3.3 Nous dénotons par $\mathbb{L}(i, z_i, u_i)$ le vecteur $(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0)$ et $\mathbb{L}(i, (z_i, u_i))$ le vecteur $(0, 0, \dots, 0, 0, z_i, u_i, 0, 0, \dots, 0, 0)$.

Définition 3.4 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto [-\infty, \infty]$ est dite **positivement homogène** si pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda z) = \lambda f(z)$.

Nous avons également la proposition suivante dont la preuve se trouve dans [96, corollaire 2] :

Proposition 1 Soit $g(z_1, \dots, z_n) : \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i} \mapsto \mathbb{R}$, où $z_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ et l'ensemble

$G = \{z \in \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i} \mid g(z_1, \dots, z_n) \geq r\}$, avec $r > 0$. Soit $G_i = G \cap \{\mathbb{L}(i, z_i) \mid z_i \in \mathbb{R}^{d_i}\}$ et $g_i(z_i) = g(\mathbb{L}(i, z_i))$. Si

$$(A1) \quad g(z) \leq \sum_{i=1}^n g_i(z_i),$$

$$(A2) \quad \forall i, g_i(0) = 0 \text{ and } \forall \lambda \in (0, 1], \lambda g(\frac{z_i}{\lambda}) \geq g_i(z_i),$$

$$(A3) \quad \forall i, g_i(z_i) \leq 0 \text{ implique que } \mathbb{L}(i, z_i) \in C^\infty(\text{cl conv } G_i),$$

sont satisfaites alors (3.54) est satisfaite pour l'ensemble G .

Soit $e_i^d \in \mathbb{R}^{\sum_{j=1}^n d_j}$ tel que la composante d'indice $d + \sum_{j < i} d_j$ est un et le reste zéro. Supposons que pour tout i $\text{conv}(G_i)$ est fermé. Supposons également qu'il existe γ tel que pour tout $\gamma' \geq \gamma, i \in N, d \in \{1, \dots, d_i\}$ et $z \geq 0$, on a que $g(z + \gamma' e_i^d) \geq g(z)$. Alors $\text{conv}(G)$ est fermé.

Proposition 2 Soit $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid axy + bx + c \geq r\}$ où a, b et c sont non négatifs et r est positif. Alors Q admet une description convexe (ensemble supérieur d'une fonction concave) qui utilise des fonctions homogènes positives. En particulier $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \eta(x, y) \geq r\}$ avec $\eta(x, y) = \frac{1}{2} \left(bx + cy + \sqrt{(bx + cy)^2 + 4arxy} \right)$.

Preuve. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $c \geq b$ et ainsi supposer que a ou c est non nul. Ainsi, pour tout $(x, y) \in Q$, on a que $ax + c > 0$. Ainsi, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y = \frac{r-bx}{ax+c}\}$. Vérifions que $f(x) = \frac{r-bx}{ax+c}$ est convexe. On a en effet que $f'(x) = \frac{ar+bc}{(ax+c)^2}$ et donc $f''(x) = \frac{2a(ar+bc)}{(ax+c)^3}$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Q s'exprime alors comme l'intersection de l'épigraphe d'une fonction convexe avec l'orthant positif. Il est donc convexe.

L'inégalité définissant Q n'est pas positivement homogène. Dans un premier temps, nous homogénéisons cette fonction grâce à l'ajout d'une nouvelle variable $h > 0$. Nous obtenons ainsi $\frac{axy}{h} + bx + cy \geq rh$, ou encore, puisque $h > 0$,

$$axy + bxh + cyh \geq rh^2. \quad (3.55)$$

Notons $Q' = \{(x, y, 1) | (x, y) \in Q\}$. L'équation (3.55) définit le plus petit cône convexe contenant Q' si $h \geq 0$. De plus, si (x, y, h) satisfait (3.55) pour un $h \geq 0$, alors, pour tout $h' \in [0, h]$, (x, y, h') la satisfait également. Ainsi, Q est la projection de $\{(x, y, h) | axy + bxh + cyh \geq rh^2, h \geq 1\}$ sur l'espace des variables (x, y) . Pour que h satisfasse (3.55), on doit avoir

$$\frac{bx + cy - \sqrt{(bx + cy)^2 + 4arxy}}{2r} \leq h \leq \frac{bx + cy + \sqrt{(bx + cy)^2 + 4arxy}}{2r}. \quad (3.56)$$

En effet,

$$\begin{aligned} (3.55) &\iff 4raxy + 4r(bx + cy) \geq 4r^2h^2, \\ &\iff 4raxy + 4r(bx + cy) + (bx + cy)^2 \geq 4r^2h^2 + (bx + cy)^2, \\ &\iff 4raxy + (bx + cy)^2 \geq 4r^2h^2 + (bx + cy)^2 - 4r(bx + cy), \\ &\iff 4raxy + (bx + cy)^2 \geq (2rh - (bx + cy))^2, \\ &\iff -\sqrt{4raxy + (bx + cy)^2} \leq 2rh - (bx + cy) \leq \sqrt{4raxy + (bx + cy)^2}, \\ &\iff (3.56). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont positivement homogènes. Comme $f(x, y, h) = \frac{bx+cy-\sqrt{(bx+cy)^2+4arxy}}{2r}$ n'est pas positive, on a

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta(x, y) = \frac{1}{2} \left(bx + cy + \sqrt{(bx + cy)^2 + 4arxy} \right) \geq r \right\}.$$

■

Proposition 3 *Si l'ensemble supérieur d'une fonction positivement homogène est convexe, alors la fonction est concave tant qu'elle est positive. Plus précisément, si $W = \{(z, u) | t(z, u) \geq 1\}$ est convexe et $t(z, u)$ est positivement homogène, alors $D = \{(z, u) | t(z, u) > 0\}$ est convexe et $t(z, u)$ est concave sur D .*

Preuve. Si W est convexe, alors $W_K = \{(\lambda, x) | \lambda > 0, x = \lambda(z, u), t(z, u) \geq 1\}$ est le plus petit cône convexe contenant $\{(1, x) | x \in W\}$. Comme t est positivement homogène, on a que $W_K = \{(\lambda, x) | \lambda > 0, t(x) \geq \lambda\}$. D est la projection de W_K sur l'espace des x et est donc

convexe. De plus, l'hypographe de t sur D est $\{(r, x) | r \leq t(x), x \in D\} = \{(r, x) | r \leq \lambda \leq t(x), \lambda > 0\}$, qui est convexe si W_K est convexe, donc t est une fonction concave. ■

Définition 3.5 Nous dénotons par J, K et L les ensembles d'inégalités avec 1, 0 et -1 comme membre de droite respectivement.

Le théorème suivant ainsi que sa preuve se trouvent dans [96, Théorème 1] .

Théorème 7 Soient, pour tout $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $S_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i}$,

$$C(t^J, v^K, w^L) = \{(z, u) \mid t^j(z, u) \geq 0, \forall j \in J, v^k(z, u) \geq 0, \forall k \in K, w^l(z, u) \geq 0, \forall l \in L\},$$

$$A = \{(z, u) \mid t^j(z, u) \geq 1, \forall j \in J, v^k(z, u) \geq -1, \forall k \in K, w^l(z, u) \geq 0, \forall l \in L\},$$

et pour tout $z \in S$, $z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$ ou $z_i \in \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i}$. Supposons que

(B1) si $(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) \in S_i$ alors $z_j = 0$ pour tout $j \neq i$,

(B2) $\text{conv}(S) = \text{conv}(\bigcup_{i=1}^n S_i)$,

(B3) Il existe, pour $i \in N$, des fonctions positivement homogènes $t_i^{j_i}, v_i^{k_i}$ et $w_i^{l_i}$ pour $j_i \in J_i, k_i \in K_i$ et $l_i \in L_i$ telles que $\text{conv}(S_i) \subseteq \text{proj}_z(A_i) \subseteq \text{cl}(\text{conv}(S_i))$ où

$$A_i = \{\mathbb{L}(i, (z_i, u_i)) \mid (z_i, u_i) \in A(t_i^{j_i}, v_i^{k_i}, w_i^{l_i})\},$$

(B4) $\text{proj}_z C_j$ où $C_i = \{\mathbb{L}(i, (z_i, u_i)) \mid (z_i, u_i) \in C(t_i^{j_i}, v_i^{k_i}, w_i^{l_i})\}$ est un sous-ensemble du cône de récession de $\text{cl conv}(\bigcup_{i=1}^n S_i)$.

Alors $\text{conv}(S) \subseteq \text{proj}_z X \subseteq \text{cl conv } S$ avec

$$X = \left\{ (z, u) \mid \begin{array}{ll} \sum_{i \in N} i \in N t_i^{j_i}(z_i, u_i) \geq 1 & \forall (j_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in N} J_i \\ \sum_{i \in N} i \in I v_i^{k_i}(z_i, u_i) \geq -1 & \forall I \subseteq N, \forall (k_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i \\ t_i^{j_i}(z_i, u_i) + v_i^{k_i}(z_i, u_i) \geq 0 & \forall i \in N, \forall j_i \in J_i, \forall k_i \in K_i \\ t_i^{j_i}(z_i, u_i) \geq 0 & \forall i \in N, \forall j_i \in J_i \\ w_i^{l_i}(z_i, u_i) \geq 0 & \forall i \in N, \forall l_i \in L_i \end{array} \right\} \quad (3.57)$$

Proposition 4 ([96], Proposition 1) Soient $t^j : \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i} \times \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d'_i} \mapsto \mathbb{R}$ pour $j \in J$, $v^k : \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i} \times \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d'_i} \mapsto \mathbb{R}$ pour $k \in K$ et $w^l : \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i} \times \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d'_i} \mapsto \mathbb{R}$ pour $l \in L$. Soient, pour tout $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $S_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n d_i}$ et

$$C(t^J, v^K, w^L) = \{(z, u) | t^j(z, u) \geq 0, \forall j \in J, v^k(z, u) \geq 0, \forall k \in K, w^l(z, u) \geq 0, \forall l \in L\}.$$

Si pour tout i , $j_i \in J_i, k_i \in K_i$ et $l_i \in L_i$, les fonctions $t_i^{j_i}, v_i^{k_i}$ et $w_i^{l_i}$ sont concaves et positivement homogènes et que les ensembles S_i sont non vide, alors $\text{proj}_z C_i \subseteq C^\infty(\text{cl conv } (\bigcup_{i=1}^n S_i))$ avec $C_i = \{\mathbb{L}(i, (z_i, u_i)) | (z_i, u_i) \in C(t_i^{J_i}, v_i^{K_i}, w_i^{L_i})\}$.

Preuve du théorème 6. Supposons, sans perte de généralité que pour chaque i , au moins un des a_i, b_i ou c_i est non nul. Soit $z_i = (x_i, y_i)$ et $g_i(z_i) = a_i x_i y_i + b_i x_i + c_i y_i$. On a alors que $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid g(x, y) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i, y_i) \geq r \right\}$. On a clairement que $g_i(0) = 0$ et que $g(z) = \sum_{i=1}^n g_i(z_i)$, donc l'hypothèse (A1) est satisfaite.

De plus, pour tout $0 < \lambda \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \lambda g_i\left(\frac{z_i}{\lambda}\right) &= \lambda \left(a_i \frac{x_i}{\lambda} \frac{y_i}{\lambda} + b_i \frac{x_i}{\lambda} + c_i \frac{y_i}{\lambda} \right), \\ &= \frac{a_i x_i y_i}{\lambda} + b_i x_i + c_i y_i, \\ &\geq g_i(z_i). \end{aligned}$$

L'hypothèse (A2) est satisfaite.

Soit $B_i = \{\mathbb{L}(i, x_i, y_i) \in \mathbb{R}_+^{2n} | g_i(x_i, y_i) \geq 0\}$. Notons que si $(x'_i, y'_i) \geq 0$, alors on a $g_i(x_i + x'_i, y_i + y'_i) \geq g_i(x_i, y_i)$. Ainsi, si $z'_i = (x'_i, y'_i) \geq 0$ alors $(0, z'_i, 0) \in C^\infty(\text{cl conv } B_i)$ et on a que l'hypothèse (A3) est satisfaite.

Ainsi, on a, par la proposition 1 que B la propriété d'extension convexe est satisfaite. De plus, comme g est non décroissante et que $\text{cl}(B_i) = B_i$, on a par la proposition 1 que $\text{conv}(B)$ est fermé.

Par la proposition 2, on a que B_i est défini par $\eta_i(x_i, y_i) \geq r$. Notons de plus que $\eta_i(x_i, y_i)$ est une fonction positivement homogène donc l'hypothèse (B3) est satisfaite.

Remarquons que η_i est concave par la proposition 3. Puisque pour z_i suffisamment grand on a $g(z) \geq r$, on a $B_i \neq \emptyset$ et par la proposition 4, l'hypothèse (A4) est satisfaite.

Finalement, par le théorème 7 et une discussion présentée dans [96] (située après la définition 2), on a que X défini par (3.57) est égale à $\text{cl conv}(B)$. Nous avons montré plus tôt dans cette preuve que $\text{conv}(B)$ est fermé, donc

$$\text{cl conv}(B) = \text{conv}(B) = X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i, y_i) \geq r \right\}.$$

■

Contrairement à la relaxation de McCormick que nous avons présentée dans la section 3.4.1, cette relaxation est une relaxation convexe non linéaire et représente l'enveloppe convexe d'un ensemble bilinéaire défini par B . Nous allons maintenant appliquer cette approche au problème de diète porcine.

Cette relaxation ne peut s'appliquer que sur les contraintes du type "supérieur ou égal" car tous nos coefficients sont positifs. La relaxation que nous obtenons alors n'est pas convexe puisque certaines contraintes (les "inférieur ou égal") ne sont pas incluses dans la relaxation et sont donc toujours bilinéaires.

Cependant, en résolvant cette relaxation, nous obtenons tout de même une borne inférieure à la valeur optimale du problème bilinéaire initial (2.1). Nous obtenons les valeurs 89.54 pour l'instance 1 et 62.08 pour l'instance 2, ce qui est largement plus faible que les bornes inférieures connues (94.84 et 67.23 respectivement).

Cette relaxation étant supposée donner l'enveloppe convexe d'un ensemble, c'est-à-dire le plus petit convexe contenant notre ensemble, nous pensions obtenir de très bons résultats. Or, on constate que la relaxation de McCormick est meilleure. Cela est en fait dû aux bornes sur les variables.

La prochaine section est consacrée à montrer comment les bornes agissent sur ces deux relaxations.

3.4.3 Illustrations des relaxations de McCormick et Tawarmalani

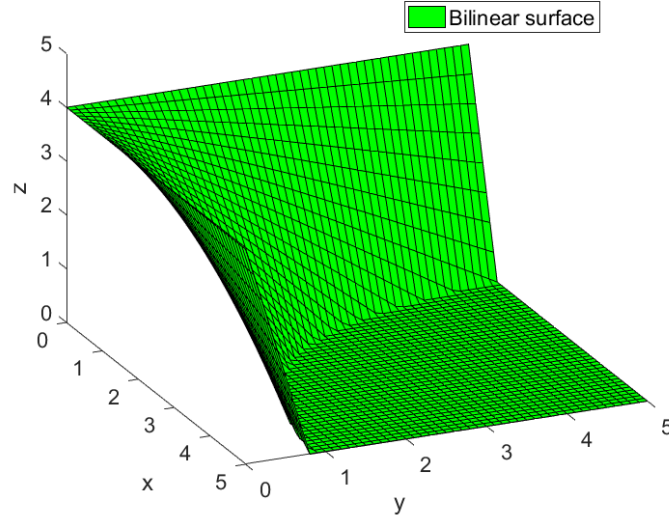


Figure 3.2 – Illustration de la surface bilinéaire $B = \{(x, y, z) \in [0, 5]^3 | xy + z \geq 4\}$.

Considérons l'ensemble $B = \{(x, y, z) \in [0, 5]^3 | xy + z \geq 4\}$. Cet ensemble est représenté par tous les points appartenant à $[1, 5]^3$ et situés au-dessus de la surface verte illustrée par la figure 3.2.

La relaxation de McCormick décrite dans la section 3.4.1, est donnée par l'ensemble

$$B_M = \left\{ (x, y, z) \in [1, 5]^3 \left| \begin{array}{l} z \geq 4 - 5x \\ z \geq 4 - 5y \end{array} \right. \right\}.$$

Cet ensemble peut être visualisé en rouge sur la figure 3.3.

On peut maintenant observer l'allure de l'enveloppe convexe décrite dans la section 3.4.2. Celle-ci est donnée par $B_T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 | 2\sqrt{xy} + z \geq 4\}$ et est représentée en bleu sur la figure 3.4.

Enfin, la figure 3.5 superpose la surface initiale ainsi que les deux relaxations. On peut constater que les deux relaxations s'intersectent l'une et l'autre. Ainsi, il peut arriver que la relaxation de McCormick fournisse une meilleure solution que la relaxation de Tawarmalani *et al.*

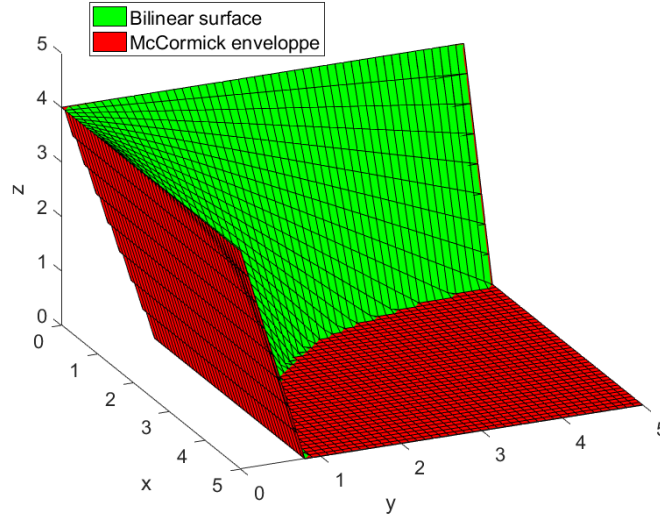


Figure 3.3 – Illustration de la surface bilinéaire B et de sa relaxation de McCormick B_M .

Plus intéressant encore, sous certaines conditions appropriées, la relaxation de McCormick peut être complètement incluse dans la relaxation de Tawarmalani *et al.* Par exemple, si on considère, de manière générale, l'ensemble

$$B = \{(x, y, z) \in [0, u_x] \times [0, u_y] \times [0, u_z] | xy + z \geq r\},$$

alors l'enveloppe convexe telle que décrite dans la section 3.4.2 est donnée par

$$B = \{(x, y, z) \in [0, u_x] \times [0, u_y] \times [0, u_z] | \sqrt{rxy} + z \geq r\}.$$

La relaxation de McCormick nous donne les quatre équations suivantes :

$$xy \geq 0, \tag{3.58}$$

$$x(u_y - y) \geq 0, \tag{3.59}$$

$$(u_x - x)y \geq 0, \tag{3.60}$$

$$(u_x - x)(u_y - y) \geq 0. \tag{3.61}$$

Par (3.59) et (3.60), on peut déduire que

$$r - z \geq u_y x, \tag{3.62}$$

$$r - z \geq u_x y. \tag{3.63}$$

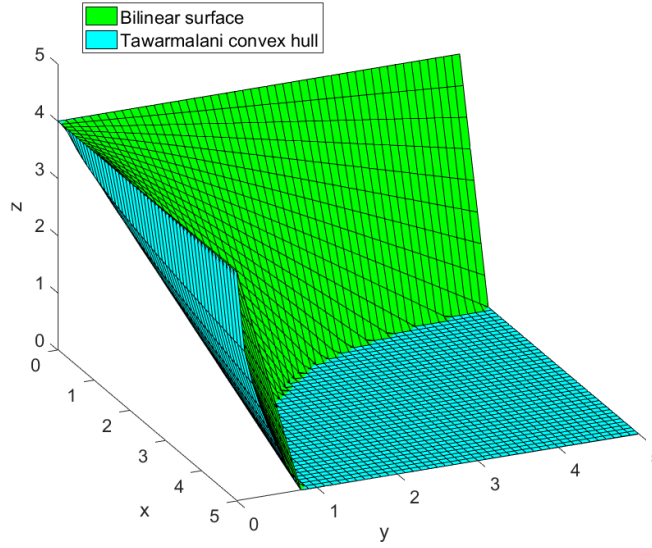


Figure 3.4 – Illustration de la surface bilinéaire B et de son enveloppe convexe B_T .

On a de plus que $r - z \leq \sqrt{rxy}$. Ainsi, la relaxation de McCormick est incluse dans l'enveloppe convexe définie par Tawarmalani si et seulement si

$$\begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x y \leq \sqrt{rxy} \end{cases} \iff \begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x u_y xy \leq rxy \end{cases} \iff \begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x u_y \leq r. \end{cases}$$

Ainsi, si $r \geq u_x u_y$, la relaxation de McCormick sera totalement incluse dans l'enveloppe convexe définie par Tawarmalani *et al.* Ce comportement peut être observé sur la figure 3.6 où nous avons considéré l'ensemble de départ

$$B = \{(x, y, z) \in [0, 5]^3 | xy + z \geq 25\}.$$

3.4.4 Une relaxation semi-définie positive

La dernière relaxation convexe que nous présentons est la relaxation semi-définie positive. L'idée générale de cette relaxation est présentée dans [13]. Tout problème bilinéaire peut être vu comme un problème quadratique particulier. En effet, le problème (2.1) peut s'écrire

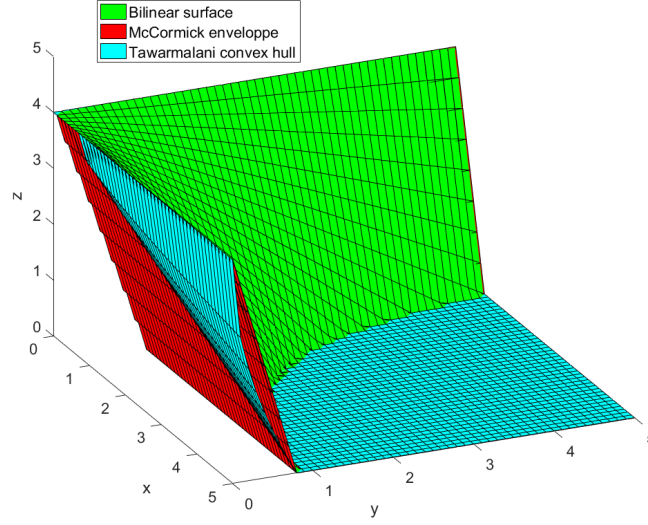


Figure 3.5 – Illustration de la surface bilinéaire B et les relaxations de Tawarmalani *et al.* B_T et McCormick B_M .

sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & x^t Q^0 y \\ \text{s.à} & x^t Q^p y \geq d^p, \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq b, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq m. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Le but de la relaxation SDP est d'écrire le problème sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y,Z} & f(x, y, Z) \\ \text{s.à} & b \leq g(x, y, Z) \leq B, \\ & Z \succeq 0, \end{array} \right. \quad (3.65)$$

où f et g sont des fonctions linéaires et $Z \succeq 0$ signifie " Z semi-définie positive".

Dans un premier temps, définissons le produit scalaire entre deux matrices A et B tel que

$$A \bullet B = \text{tr}(AB). \quad (3.66)$$

Tout terme quadratique $z^t Q z$ peut être écrit comme le produit scalaire de deux matrices.

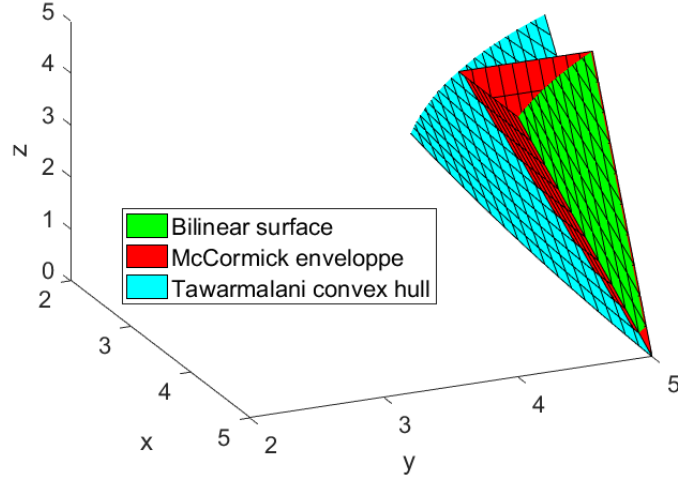


Figure 3.6 – Exemple tel que la relaxation de McCormick est incluse dans la relaxation de Tawarmalani.

Soit $Z = zz^t$. On a alors

$$z^t Q z = \sum_{i,j} Q_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j} Q_{ij} Z_{ij} = \text{tr}(QZ) = Q \bullet Z.$$

En utilisant le changement de variable $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en ajustant les matrices Q^0 et Q^p le problème (2.1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{z,Z} & Q^0 \bullet Z \\ \text{s.à} & Q^p \bullet Z \geq d^p, \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & Az \geq b, \\ & 0 \leq z \leq u, \\ & Z = zz^t. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Nous relaxons ensuite la contrainte $Z = zz^t$ par

$$Z \succeq zz^t \iff Z - zz^t \succeq 0 \iff \begin{pmatrix} Z & z \\ z^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Ainsi, la relaxation SDP du problème (2.1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{z, Z} & Q^0 \bullet Z \\ \text{s.à} & Q^p \bullet Z \geq d^p, \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & Az \geq b, \\ & 0 \leq z \leq u, \\ & \begin{pmatrix} Z & z \\ z^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array} \right. \quad (3.68)$$

Grâce à la forme de nos instances typiques, ce problème peut être séparé par blocs. En effet, les variables x_1 et y_1 n'apparaissent jamais multipliées par x_2 ou y_2 . Ainsi, si on considère les variables $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on réécrit le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{z, Z} & Q^0 \bullet Z_1 + Q^0 \bullet Z_2 \\ \text{s.à} & Q^p \bullet Z_1 + Q^p \bullet Z_2 \geq d^p, \quad \forall p \in P, \\ & A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \geq b, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} Z_1 & z_1 \\ z_1^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \\ & \begin{pmatrix} Z_2 & z_2 \\ z_2^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \end{array} \right. \quad (3.69)$$

où $u_1 = (u_{x_1}, u_{y_1})$ et $u_2 = (u_{x_2}, u_{y_2})$. On a de plus que

$$Q^0 \bullet Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_i Z_{i, |I|+j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_i x_i y_j,$$

et

$$Q^p \bullet Z = \sum_{i \in I} q_i^p Z_{i, |I|+j} = \sum_{i \in I} q_i^p x_i y_j.$$

La matrice A est telle que

$$a_1 z = \sum_{i \in I} z_{1i} = 1, \quad (3.70)$$

$$a_2 z = \sum_{i \in I} z_{2i} = 1, \quad (3.71)$$

$$a_3^j z = z_{1, |I|+j} + z_{2, |I|+j} \leq W_j^{\max}. \quad (3.72)$$

Les dimensions des matrices du problème (3.69) sont plus petites que pour le problème (3.68). Cette astuce accélérera le temps de calcul de la résolution du problème.

Nous pouvons également ajouter des inégalités valides à ce problème. Par exemple, les variables Z_1 et Z_2 représente les termes bilinéaires du problème (2.1) et nous pouvons ainsi ajouter les bornes 0 et uu^t à ces variables. Les termes $x_i y_j$ apparaissent dans les nouvelles variables Z_1 et Z_2 et on a $Z_{t,i,|I|+j} = Z_{t,|I|+j,i} = x_{ti} y_{tj}$, pour tout $t \in \{1, 2\}$. Comme pour McCormick, à partir des contraintes

$$x_i \leq u_{x_i}, \tag{3.73}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ti} = 1, \quad \forall t \in \{1, 2\}, \tag{3.74}$$

$$y_{1j} + y_{2j} \leq W_j^{\max}. \tag{3.75}$$

En posant B_j la matrice telle que $B_j \bullet Z_t = \sum_{i \in I} Z_{t,i,|I|+j}$, pour tout $j \in J, t \in \{1, 2\}$, on déduit des équations (3.73)–(3.75) les équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Z_{t,i,|I|+j} + Z_{t,|I|+j,i}) &\leq u_x B_j \bullet Z_t, & \forall t \in \{1, 2\}, \forall j \in J, \\ B_j \bullet Z_1 + B_j \bullet Z_2 &\leq W_j^{\max}, & \forall j \in J. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème SDP incluant les inégalités valides est alors

$$(P_{SDP}) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{z, Z} & Q^0 \bullet Z_1 + Q^0 \bullet Z_2 & (3.76) \\ \text{s.à} & Q^p \bullet Z_1 + Q^p \bullet Z_2 \geq d^p, & \forall p \in P, \quad (3.77) \\ & A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \geq b, & (3.78) \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, & (3.79) \\ & \begin{pmatrix} Z_1 & z_1 \\ z_1^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, & (3.80) \\ & \begin{pmatrix} Z_2 & z_2 \\ z_2^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0. & (3.81) \\ & 0 \leq Z_1 \leq u_1 u_1^t & (3.82) \\ & 0 \leq Z_2 \leq u_2 u_2^t & (3.83) \\ & \frac{1}{2} (Z_{t,i,|I|+j} + Z_{t,i,|I|+j}) \leq u_x B_j \bullet Z_t, & \forall t \in \{1, 2\}, \forall j \in J, \quad (3.84) \\ & B_j \bullet Z_1 + B_j \bullet Z_2 \leq W_j^{\max}, & \forall j \in J. \quad (3.85) \end{array} \right.$$

La modélisation de ce problème a été réalisée sur Matlab R2015b et nous avons utilisé CVX [47, 46] et plus particulièrement SDPT3 pour résoudre ces problèmes. Nous avons obtenu les valeurs optimales 94.84 pour l'instance 1 et 67.23 pour l'instance 2, soit exactement les valeurs optimales du problème (1.14).

Cette relaxation continue de conforter l'idée de notre conjecture.

Dans le cas du problème de diète porcine, nous avons $W^{\max} = u_y$. Pour ce problème, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 8 *Soit $x^* = (x_{ij}^*)$ une solution optimale de (P_{ideal}) . Soient $(x_{1ij}, x_{2ij}) \geq 0$ une décomposition de x_{ij}^* telle que $x_{1ij} \leq u_{xi} \sum_{i \in I} x_{1ij}$ et $x_{2ij} \leq u_{xi} \sum_{i \in I} x_{2ij}$. Soient $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}_+^{|I| \times |J|}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} V_{11} & x_{1ij} \\ x_{1ij}^t & V_{12} \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} V_{21} & x_{2ij} \\ x_{2ij}^t & V_{22} \end{pmatrix}$ avec $V_{11}, V_{21} \leq u_x^t u_x$ et $V_{12}, V_{22} \leq u_y^t u_y$. S'il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{|I|+|J|}$ tels que $0 \leq z_1, z_2 \leq u$, $\begin{pmatrix} Z_1 & z_1 \\ z_1^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$, $\begin{pmatrix} Z_2 & z_2 \\ z_2^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$, $\sum_{i \in I} z_{1i} = 1$, $\sum_{i \in I} z_{2i} = 1$ et $z_{1j} + z_{2j} \leq W^{\max}$ pour tout $j \in J$, alors (Z_1, Z_2, z_1, z_2) est une solution de P_{SDP} et on a que $v_{ideal}^* = v_{SDP}^*$, avec v_{ideal}^* et v_{SDP}^* les valeurs optimales de (P_{ideal}) et (P_{SDP}) .*

Preuve. Soit $x^* = (x_{ij}^*)_{i \in I, j \in J}$ une solution de (P_{ideal}) . Posons $x^* = x_{1ij}^* + x_{2ij}^*$ et

$$Z_1 = \begin{pmatrix} V_1 & x_{1ij}^* \\ x_{1ij}^{*t} & V_1^t \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} V_2 & x_{2ij}^* \\ x_{2ij}^{*t} & V_2^t \end{pmatrix}.$$

Vérifions que toutes les contraintes de (P_{SPD}) sont satisfaites.

— on a, $\forall j \in J, \forall p \in P$

$$\begin{aligned} (3.48) &\iff \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^p x_{ij}^* \leq \overline{d}_j^p, \\ &\iff \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^p (x_{1ij}^* + x_{2ij}^*) \leq \overline{d}_j^p, \\ &\iff \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^p x_{1ij}^* + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^p x_{2ij}^* \leq \overline{d}_j^p, \\ &\iff \underline{d}_j^p \leq Q^p \bullet Z_1 + Q^p \bullet Z_2 \leq \overline{d}_j^p, \\ &\iff (3.77). \end{aligned}$$

— On a bien $0 \leq Z_1, Z_2 \leq u^t u$. En effet, par définition on a que $0 \leq V_{11}, V_{21} \leq u_x^t u_x$ et $0 \leq V_{21}, V_{22} \leq u_y^t u_y$. De plus, par (3.49) et (3.50), on a que $x^* \leq u_x u_y^t$, d'où (3.82) et (3.83).

— (3.84) est satisfaite. En effet, $\forall i \in I, \forall j \in J$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Z_{2ij} + Z_{2ji}) &= x_{1ij}^*, \\ &\leq u_x \sum_{i \in I} x_{1ij}^*, \\ &\leq u_x B \bullet Z_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (Z_{2ij} + Z_{2ji}) &= x_{2ij}^*, \\ &\leq u_x \sum_{i \in I} x_{2ij}^*, \\ &\leq u_x B \bullet Z_2. \end{aligned}$$

— (3.85) est satisfaite car

$$\begin{aligned}
B \bullet Z_1 + B \bullet Z_2 &= \sum_{i \in I} x_{1ij}^* + \sum_{i \in I} x_{2ij}^*, \\
&= \sum_{i \in I} x_{1ij}^* + x_{2ij}^*, \\
&= \sum_{i \in I} x_{ij}^*, \\
&\leq u_y.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{|I|+|J|}$ tels que $0 \leq z_1, z_2 \leq u$, $\begin{pmatrix} Z_1 & z_1 \\ z_1^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$,

$$\begin{pmatrix} Z_2 & z_2 \\ z_2^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \sum_{i \in I} z_{1i} = 1 \text{ et } \sum_{i \in I} z_{2i} = 1.$$

— Par définition de z_1 et z_2 , les contraintes (3.78)–(3.81) sont satisfaites.

On a donc que (Z_1, Z_2, z_1, z_2) est alors une solution réalisable de (P_{SDP}) .

Notons de plus que de toute solution de (P_{SPD}) on peut déterminer une solution de (P_{ideal}) et on a donc que $x_{ideal}^* = v_{SDP}^*$.

En effet, soit $(Z_1^*, Z_2^*, z_1^*, z_2^*)$ une solution de (P_{SPD}) . Posons, pour tout $x = (x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ tel que

$$x_{ij} = \frac{1}{2} (Z_{1,i,|I|+j}^* + Z_{1,|I|+j,i}^*) + \frac{1}{2} (Z_{2,i,|I|+j}^* + Z_{2,|I|+j,i}^*).$$

On a alors

— (3.48) est satisfaite car pour tout $j \in J$, on a

$$\begin{aligned}
(3.77) &\iff \underline{d}^p \leq Q^p \bullet Z_1^* + Q^p \bullet Z_2^* \leq \bar{d}^p, \\
&\iff \underline{d}^p \leq \sum_{i \in I} \frac{1}{2} q_i^p (Z_{1,i,|I|+j}^* + Z_{1,|I|+j,i}^*) + q_i^p (Z_{2,i,|I|+j}^* + Z_{2,|I|+j,i}^*) \leq \bar{d}^p, \\
&\Rightarrow \underline{d}^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p x_{ij} \leq \bar{d}^p, \\
&\Rightarrow (3.48).
\end{aligned}$$

— (3.49) est satisfaite car pour tout $j \in J$, on a

$$\begin{aligned}
(3.85) &\iff B_j \bullet Z_1 + B_j \bullet Z_2 \leq u_y, \\
&\iff \sum_{i \in I} \frac{1}{2} (Z_{1,i,|I|+j}^* + Z_{1,|I|+j,i}^*) + \sum_{i \in I} \frac{1}{2} (Z_{2,i,|I|+j}^* + Z_{2,|I|+j,i}^*) \leq u_y, \\
&\implies \sum_{i \in I} x_{ij} \leq u_y, \\
&\implies (3.49).
\end{aligned}$$

— (3.50) est satisfaite car, pour tout $j \in J$, on a

$$\begin{aligned}
(3.84) &\implies \frac{1}{2} (Z_{1,\cdot,|I|+j} + Z_{1,|I|+j,\cdot}) + \frac{1}{2} (Z_{2,\cdot,|I|+j} + Z_{2,|I|+j,\cdot}) \leq u_x B \bullet Z_1 + u_x B \bullet Z_2, \\
&\implies x_{ij} \leq u_x \sum_{i \in I} \frac{1}{2} (Z_{1,i,|I|+j} + Z_{1,|I|+j,i}) + u_x \frac{1}{2} (Z_{2,i,|I|+j} + Z_{2,|I|+j,i}), \\
&\implies x_{ij} \leq u_x \sum_{i \in I} x_{ij}, \\
&\implies (3.50).
\end{aligned}$$

Donc x est une solution de (P_{ideal}) . ■

Remarque 3.6 Les conditions du théorème 8 ne sont pas restrictives, car nous avons beaucoup de liberté sur les matrices V_{11}, V_{12}, V_{21} et V_{22} .

Dans ce théorème, la décomposition $x_{ij}^* = x_{1ij} + x_{2ij}$ permet en fait de se ramener à l'utilisation de deux mélanges. L'hypothèse $x_{tij} \leq u_{x_i} \sum_{i \in I} x_{tij}$, pour $t \in \{1, 2\}$, permet de s'assurer que la proportion maximale de chaque ingrédient est respectée dans la décomposition. De plus, z_1 et z_2 correspondent à la concaténation de la composition du mélange et de la quantité d'où les hypothèses que nous faisons.

Toutes les hypothèses du théorème 8 sont satisfaites pour nos deux instances.

Conclusion

Les autres approches présentées dans ce chapitre sont des approximations ou relaxations. Nous sommes capables d'obtenir un problème linéaire mixte en nombres entiers en discrétisant.

sant une des variables. Cela permet d'obtenir une approximation de la solution globale du problème bilinéaire. Les méthodes de Branch and Bound permettant de résoudre ce genre de problème ne sont pas efficaces sur de grands problèmes. Par exemple, résoudre un problème de 32 variables continues et 14 variables entières (au lieu de 222) prend environ 10^6 secondes. Cependant, la solution calculée pour de petites instances a la même valeur que la solution locale, et cela soutient notre conjecture. La relaxation continue du MILP ne fournit pas de solutions améliorant la borne inférieure déjà connue, tout comme les relaxations lagrangiennes du problème discrétisé et continu. Enfin, nous présentons trois relaxations convexes. Ces approches fournissent des bornes inférieures, sans pour autant l'améliorer. Cependant, nous prouvons que certaines relaxations sont équivalentes au problème idéal.

Toutes ces méthodes soutiennent notre conjecture : "Toute solution locale est une solution globale pour le problème bilinéaire appliqué à la diète porcine pour les instances de prix que nous considérons".

L'article soumis à "Journal Of Global Optimization" présentant ces travaux peut être trouvé en annexe G.

CHAPITRE 4

Extension des modèles bilinéaires

Ce chapitre est consacré à des extension des modèles bilinéaires MC-1MF-EL et MC-3HF-EL. Nous présenterons deux approches différentes. La pollution dans l'industrie porcine est un problème majeur connu et nous devons faire notre possible afin de la réduire. Dans la section 4.1, nous intégrerons les rejets environnementaux aux modèles afin de les réduire. Cette approche a pour but de proposer aux utilisateurs un spectre des solutions pour différentes valeurs de rejets de phosphore et d'azote, et du coût de l'alimentation. La section 4.2 sera consacrée à l'optimisation robuste. Les ingrédients étant soumis à des variations boursières, leurs prix sont incertains. Nous utiliserons une analyse en pire cas pour montrer que considérer le prix moyen des ingrédients est un bon compromis. L'optimisation bi-niveaux nous permettra de déterminer le pire scénario de prix, c'est-à-dire quand le gain par rapport à une alimentation MC-3PF-EF est le plus faible, et le meilleur scénario de prix, c'est-à-dire quand le gain par rapport à une alimentation MC-3PF-EF est le plus grand.

4.1 Approche intégrant les rejets environnementaux

Les études que nous avons présentées précédemment portaient uniquement sur la minimisation du coût de l'alimentation. Or, les éleveurs souhaitant faire davantage d'économie

peuvent agir sur un autre levier. En effet, l'industrie porcine est fréquemment citée comme étant une activité très polluante par l'apport massif de phosphates et de nitrates lors de l'épandage du lisier. Certaines réglementations obligent les éleveurs à épandre à des endroits où la terre a un taux de phosphates et de nitrates suffisamment faible pour pouvoir absorber ceux contenus dans le lisier. Ainsi, ils sont parfois contraints de parcourir plusieurs centaines de kilomètres pour évacuer leur lisier. Agir sur les quantités de phosphore (P) et d'azote (N) excrétées par les animaux peut permettre aux éleveurs de se rapprocher de leur exploitation pour l'épandage. Une gestion optimale de la composition des aliments ainsi que le programme alimentaire aura un impact majeur sur ce coût [68] mais également sur les rejets, notamment de phosphore et d'azote, et est liée à la stratégie alimentaire [26, 33, 81].

Des études [32, 33] d'évaluation de l'impact économique de la réduction de P et de N excrétés ont déjà été réalisées sur une alimentation de type traditionnelle à deux phases (TC-2PF-EF).

4.1.1 L'approche multicritère

Une des approches permettant de prendre en compte les rejets de P et de N lors de l'optimisation est la modélisation multicritère. Ce type de modélisation a été présenté entre autres par Steuer en 1986 [94] et a la particularité d'avoir plusieurs objectifs à optimiser en même temps et sous les mêmes contraintes. Les problèmes mathématiques correspondants sont modélisés de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \min_x & f_1(x), \\ & \vdots \\ \min_x & f_n(x), \\ \text{s.à} & x \in S. \end{array} \quad (4.1)$$

Dans cette notation, aucune des fonctions objectif n'est privilégiée par rapport à une autre, il n'y a pas de hiérarchie.

Dans le cas de l'alimentation porcine, nous voulons déterminer une diète satisfaisant les besoins des animaux qui minimise à la fois le coût de l'alimentation $\left(\sum_{j \in J} q_j (c^t x_j) \right)$, les

rejets de phosphore $\left(\sum_{j \in J} q_j (m_{P.x.j}) - R_{Pj} \right)$, et les rejets d'azote $\left(\sum_{j \in J} q_j (m_{N.x.j}) - R_{Nj} \right)$, R_P et R_N étant la quantité de P et de N retenu par l'animal. Ainsi le modèle étudié dans ce cas est le suivant :

$$\begin{aligned}
& \min_{X,Q} \quad \sum_{j \in J} q_j (c^t x.j), \\
& \min_{X,Q} \quad \sum_{j \in J} q_j (m_{P.x.j}) - R_{Pj}, \\
& \min_{X,Q} \quad \sum_{j \in J} q_j (m_{N.x.j}) - R_{Nj}, \\
& \text{s.à} \quad x.j \in S_j \quad \forall j \in J.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ce genre de problème ne possède généralement pas de solution qui minimise chacune des fonctions objectifs simultanément, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point x^* tel que $x^* \in \arg \min \{f_i(x) | x \in S\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Un autre type d'optimum apparaît alors : les solutions Pareto-optimales.

Définition 4.1 *Une solution est dite **Pareto-optimale** il n'existe pas de point tel qu'on peut améliorer toutes les fonctions objectif.*

Dans les problèmes multicritère, il existe un certain nombre, possiblement infini, de solutions Pareto-optimales.

Ces méthodes sont efficaces sur des problèmes de taille restreinte. Notre problème comportant plus de 250 variables et 2700 contraintes, ces méthodes ne sont pas appropriées pour y être appliquées.

De plus, nous ne cherchons pas à obtenir une solution globale optimale de ce problème mais plutôt d'observer l'influence des rejets de phosphore et d'azote sur le coût de l'alimentation. Le but principal de cette étude consiste à proposer aux utilisateurs plusieurs solutions qui selon la stratégie choisie réduira plus ou moins les rejets environnementaux et le coût de l'alimentation. Afin de faciliter le choix des utilisateurs, nous souhaitons que la visualisation des résultats soit simple et compréhensible. Les surfaces que nous obtenons sont des relaxations des surfaces de Pareto et sont suffisantes pour l'industrie porcine. La visualisation des solutions est difficile lorsque le nombre de critères est supérieur à deux. Cependant,

il est possible de se ramener à un problème d'optimisation monocritère grâce à la méthode ε -contraintes. Cette méthode permet de tracer la surface des courbes de niveaux pour une lecture claire des résultats, et ainsi d'évaluer cet impact. Nous nous intéressons plus spécialement à un problème hiérarchique qu'à un problème multicritère. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser cette approche.

4.1.2 La modélisation ε -contraintes

La méthode ε -contraintes consiste à laisser un des critères en tant que fonction objectif et à insérer de nouvelles contraintes, correspondant aux autres critères. Celles-ci sont alors bornées supérieurement par un paramètre que l'on pourra faire varier.

Dans le cas de l'industrie porcine, le coût de l'alimentation reste le critère principal de minimisation, c'est pourquoi nous le gardons en tant que fonction objectif et que les rejets de P et de N sont insérés comme contraintes. Une solution non dominée au niveau azote ou phosphore, c'est-à-dire minimisant l'azote ou le phosphore, n'est pas très intéressante pour les producteurs, tandis qu'une solution non dominée d'un point de vue économique est très importante. Ainsi, le problème à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \sum_{j \in J} q_j (c^t x_{.j}) \\ \text{s.à} & x_{.j} \in S_j, \\ & \sum_{j \in J} q_j (m_P x_{.j}) - R_P \leq \varepsilon_P, \\ & \sum_{j \in J} q_j (m_N x_{.j}) - R_N \leq \varepsilon_N, \end{array} \quad \forall j \in J, \right. \quad (4.3)$$

où ε_P et ε_N sont les niveaux de phosphore et d'azote maximum autorisés.

Les paramètres ε_P et ε_N peuvent alors être fixés à différents niveaux pour ainsi obtenir les diètes optimales sur un quadrillage de valeurs possibles pour P et N.

Cette méthode a été utilisée dans [33]. Les auteurs ont fait varier ε_P de 100% à 68% de la valeur de P excrété et ε_N de 100% à 57% de la valeur de N excrété par l'alimentation traditionnelle. Les résultats de cette étude montrent que plus les rejets sont réduits, plus le

coût de l'alimentation augmente. Le même constat a été observé par Mackenzie *et al.* [66] lors de son étude visant à évaluer l'impact d'une taxe sur les rejets de P, de N, ou sur les émissions de carbone.

4.1.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous appliquons la méthode ε -contraintes décrite précédemment à deux types d'alimentation : l'alimentation par mélanges et la nouvelle alimentation hybride.

4.1.3.1 Application à l'alimentation par mélanges

Nous proposons, dans un premier temps, d'appliquer la méthode ε -contraintes à une alimentation MC-1MF-EL, définie par le modèle bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} c^t (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \\ \text{s.à} & (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \in S_j, \quad \forall j \in J. \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous avons vu dans le chapitre 1 que cette alimentation, pour les différents jeux de données réelles que nous avons utilisés, avait un coût inférieur à l'alimentation traditionnelle d'au moins 4%.

Afin de tenir compte des effets sur l'environnement, nous utilisons donc la méthode ε -contraintes décrite précédemment. Ainsi, le modèle d'alimentation tenant compte des rejets environnementaux est

$$\begin{cases} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} c^t (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \\ \text{s.à} & (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \in S_j, \quad \forall j \in J, \\ & \sum_{j \in J} m_P (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) - R_{Pj} \leq \varepsilon_P, \\ & \sum_{j \in J} m_N (q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) - R_{Nj} \leq \varepsilon_N. \end{cases} \quad (4.5)$$

Les modèles (4.4) et (4.5) restent des problèmes très difficiles d'optimisation bilinéaire sous contraintes bilinéaires. Dans l'étude mathématique présentée dans le chapitre 2, nous décrivons les différentes propriétés (qualités et inconvénients) pour ce type de problème.

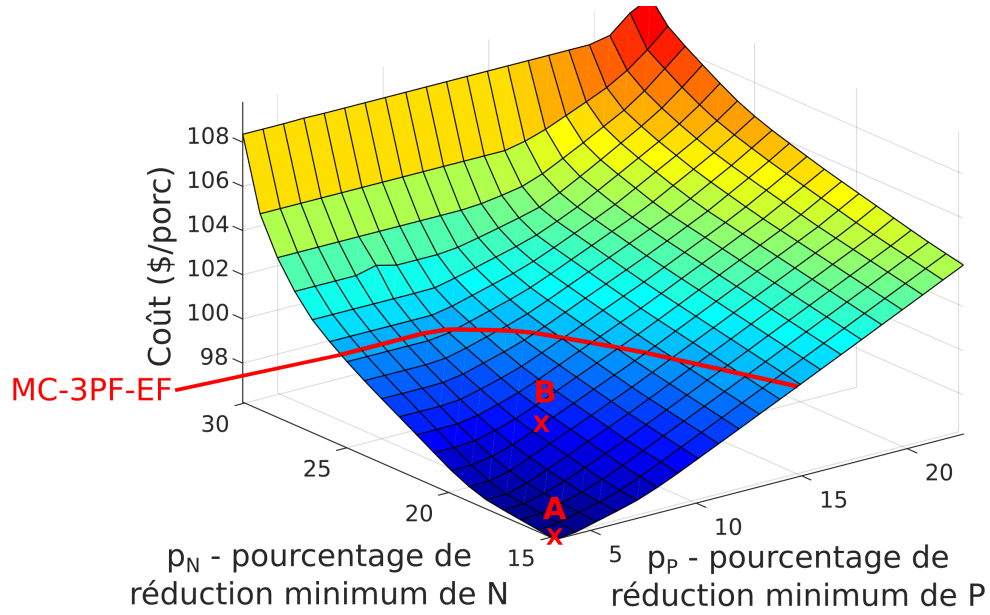


Figure 4.1 – Ensemble des solutions du modèle TC-1MF-EL appliqué aux données de 2011.

Comme nous le mentionnions dans la section 1.1, nous appliquons ce modèle sur un animal moyen, représentatif d'une population, utilisant les listes d'aliments et les schémas de prix de 2011 et de 2016.

Nous appliquons les modèles décrits précédemment pour des valeurs de ε_P et ε_N variant entre 70% et 100% des quantités de référence de phosphore et d'azote. Notons alors P_{3PF} et N_{3PF} les valeurs de référence de P et de N rejeté par l'alimentation MC-3PF-EF. Nous avons alors $\varepsilon_P = (1 - p_P)P_{3PF}$ et $\varepsilon_N = (1 - p_N)N_{3PF}$ où p_P et p_N sont des pourcentages de réduction que nous considérons. Dans notre étude ils varient de 0 à 0.3 par pas de 0.01. Nous pouvons alors obtenir le coût de l'alimentation en fonction du pourcentage de réduction de P et de N.

Les figures 4.1 et 4.2 regroupent les résultats numériques de ces modèles. Elles permettent de visualiser le spectre des valeurs possibles pour le triplet (coût, rejet de P, rejet de N). Chaque point des graphiques représente un de ces triplets. La courbe rouge notée MC-3PF-EF représente la ligne de niveau associée à l'alimentation traditionnelle et les points A et C représentent les solutions du problème MC-1MF-EL appliquées aux données de 2011 et

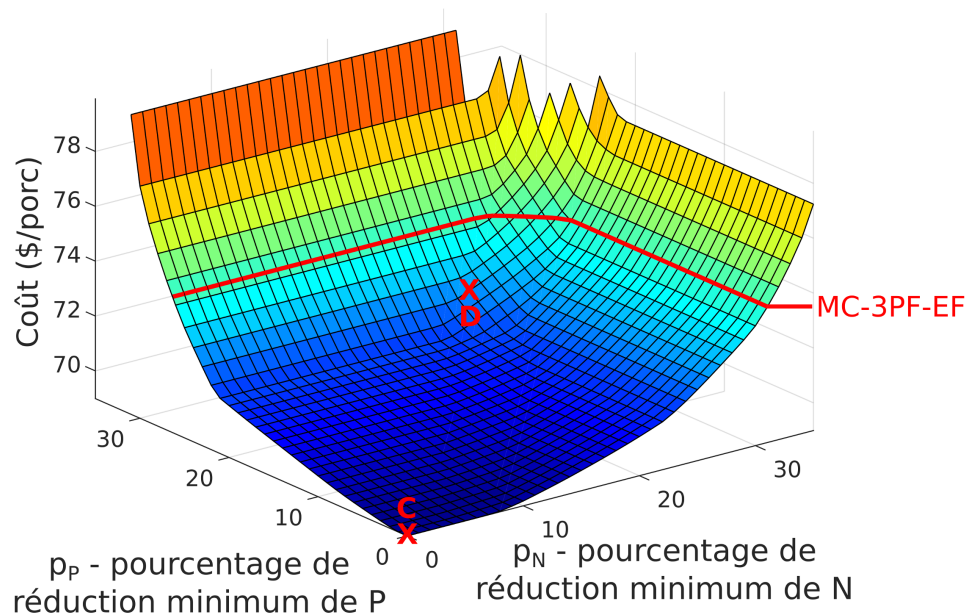


Figure 4.2 – Ensemble des solutions du modèle TC-1MF-EL appliqué aux données de 2016
2016 respectivement.

De manière plus générale, ces graphiques permettent aux utilisateurs de choisir le scénario désiré, en fonction des contraintes propres ou de réglementations non prises en compte dans les modèles généraux. Tout point situé sous la courbe rouge est une solution permettant de réduire le coût de l'alimentation par rapport à celui d'une alimentation MC-3PF-EF. Par exemple, les points B et D représentent des solutions réduisant le coût de l'alimentation de 1.83% et 2.5% respectivement par rapport à l'alimentation traditionnelle, tout en réduisant les rejets de phosphore de 7% et 23% respectivement et les rejets d'azote de 20% et 23% respectivement. Ces points ne sont que deux exemples parmi toutes les solutions possibles et ne sont donnés qu'à titre d'exemples.

Tout point situé sur la courbe rouge est une alimentation ayant un coût équivalent à une alimentation traditionnelle, mais réduisant les rejets, tandis que tous les points situés au-dessus réduisent davantage les rejets, mais le coût associé est plus élevé.

Ce travail, ainsi que les résultats numériques associés aux données de 2011, a fait l'objet d'une présentation lors des 48^{èmes} Journées de la Recherche Porcine (JRP) qui ont eu lieu à

Paris les 2 et 3 février 2016 et a fait l'objet d'un article (annexe A). Il a également donné lieu à un article dans la revue TechPorc (Annexe C)

Un article regroupant, entre autres, la méthode et les résultats associés aux données de 2016 est en cours de rédaction. Il est joint dans l'annexe D.

4.1.3.2 Application à l'alimentation hybride

Dans cette section, nous nous concentrons uniquement sur l'alimentation hybride à trois phases dont le modèle est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} c^t x_a \\ \text{s.à} & \sum_{a \in A} q_{ja} x_a \in S_j, \quad \forall j \in J, \\ & q_{j1} = 0, \quad \forall j \notin J_1, \\ & q_{jk} = 0, \quad \forall j \notin J_{k-1} \cup J_k, \forall k \in \{2, \dots, p\}, \\ & q_{j,p+1} = 0, \quad \forall j \notin J_p. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Nous avons vu dans la section 1.4 que cette alimentation permettait une réduction du coût de l'alimentation de près de 5.2% par rapport à une alimentation traditionnelle. Appliquer la méthode ε -contraintes afin de tenir compte des rejets environnementaux aura pour impact d'augmenter le coût de l'alimentation, mais nous serons toujours capables d'obtenir des solutions dont le coût et les rejets seront plus faibles que pour l'alimentation traditionnelle.

Ainsi, le modèle d'alimentation hybride tenant compte des rejets environnementaux est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X,Q} & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} c^t x_a \\ \text{s.à.} & \sum_{a \in A} q_{ja} x_a \in S_j \quad \forall j \in J, \\ & q_{j1} = 0, \quad \forall j \notin J_1, \\ & q_{jk} = 0, \quad \forall j \notin J_{k-1} \cup J_k, \forall k \in \{2, \dots, p\}, \\ & q_{j,p+1} = 0, \quad \forall j \notin J_p, \\ & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} m_P^t x_a - R_{Pj} \leq \varepsilon_P, \\ & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} q_{ja} m_N^t x_a - R_{Nj} \leq \varepsilon_N, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où ε_P et ε_N représentent les rejets maximums de phosphore et d'azote que nous considérons.

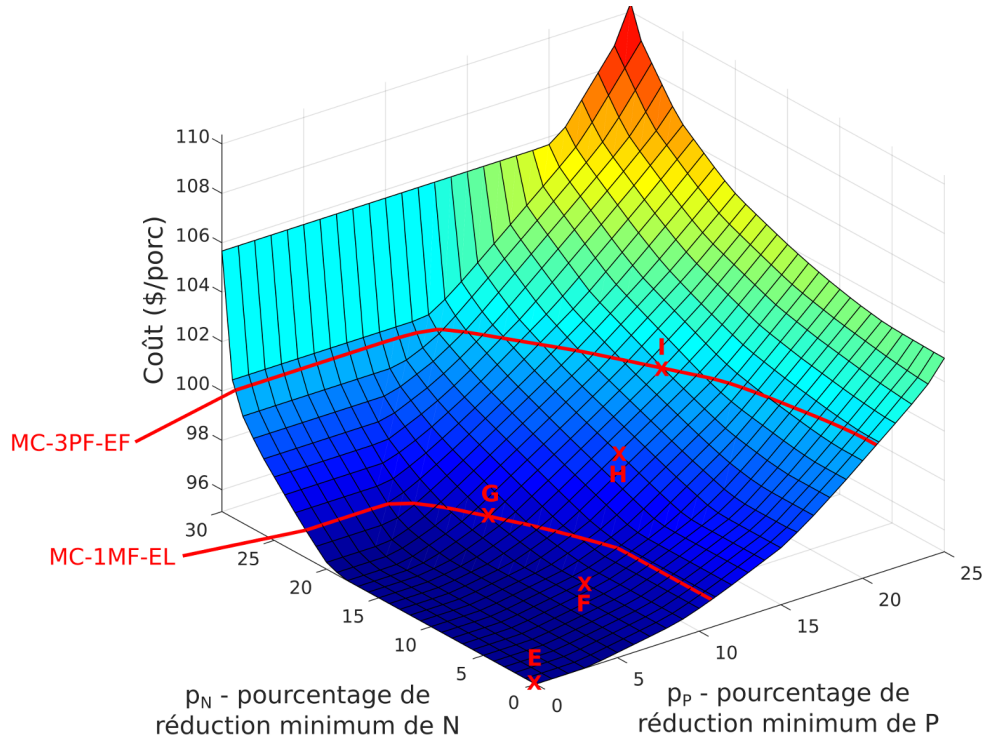


Figure 4.3 – Ensemble des solutions du modèle TC-3HF-EL appliqué aux données de 2011.

Nous appliquons les modèles décrits précédemment pour des valeurs de $\varepsilon_P = p_P P_{3PF}$ et $\varepsilon_N = p_N N_{3PF}$ variant entre 75% et 100% les quantités de référence de phosphore et entre 70% et 100% les quantités de référence d'azote aux données de 2011, c'est-à-dire p_P variant de 0 à 0.25 et p_N variant de 0 à 0.3. Nous obtenons alors le coût de l'alimentation en fonction du pourcentage minimum de réduction de P et de N (figures 4.3 et 4.4).

Avec les données de 2016, nous avons considéré les valeurs de ε_P et ε_N variant entre 100% et 65% les rejets de phosphore et d'azote de l'alimentation traditionnelle. Les résultats peuvent être facilement visualisés sur la figure 4.4.

Les points E et J présent sur les figures 4.3 et 4.4 (tableau 4.1), correspondent à la solution des problèmes monocritères MC-1MF-EL et MC- p HF-EL. Les courbes de niveaux étiquetées par MC-3PF-EF et MC-1MF-EL correspondent au coût de l'alimentation de chacune des alimentations mentionnées. Les points situés exactement sur ces courbes (par exemple G, I, L ou N) correspondent à des solutions ayant un coût d'alimentation équivalent à l'alimentation

Données	Point	Méthode	Coût (% reduc.)	P excrété (% reduc.)	N excrété (% reduc.)
2011	n/a	MC-3PF-EF	100.33	1.203	4.062
	n/a	MC-1MF-EL	96.23 (-4.1%)	1.163 (-3.3%)	3.463 (-14.8%)
	E	TC-3HF-EL	100.33 (-0%)	0.986 (-18%)	3.412 (-16%)
	F	TC-3HF-EL	98.22 (-2.10%)	1.034 (-14%)	3.493 (-14%)
	G	TC-3HF-EL	96.21 (-4.10%)	1.107 (-8%)	3.371 (-17%)
	H	TC-3HF-EL	95.66 (-4.65%)	1.107 (-8%)	3.656 (-10%)
	I	MC-3HF-EL	95.12 (-5.19%)	1.177 (-2.2%)	3.339 (-17.8%)
	n/a	MC-IF-EL	94.84 (-5.47%)	1.172 (-2.7%)	3.293 (-18.9%)
2016	n/a	MC-3PF-EF	73.94	1.298	4.112
	n/a	MC-1MF-EL	68.99 (-6.7%)	1.302 (+0.31%)	3.855 (-6.25%)
	J	TC-3HF-EL	73.94 (-0%)	0.999 (-23%)	2.755 (-33%)
	K	TC-3HF-EL	96.21 (-2.9%)	0.974 (-25%)	3.125 (-24%)
	L	TC-3HF-EL	68.99 (-6.7%)	1.103 (-15%)	3.413 (-17%)
	M	TC-3HF-EL	68.39 (-7.51%)	1.181 (-9%)	3.495 (-15%)
	N	MC-3HF-EL	67.66 (-8.17%)	1.298 (-0%)	4.112 (-0%)
	n/a	MC-IF-EL	67.23 (-9.07%)	1.274 (-1.85%)	3.862 (-6.08%)

Tableau 4.1 – Résumé des points présentés dans les figures 4.3 et 4.4.

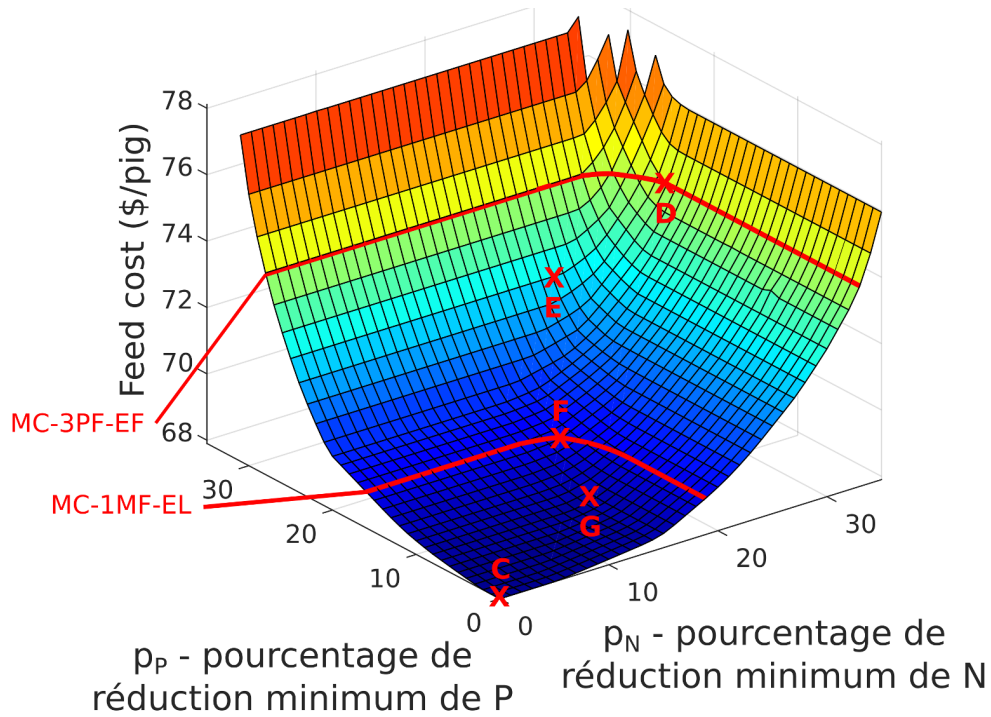


Figure 4.4 – Ensemble des solutions du modèle TC-3HF-EL appliqué aux données de 2016

étiquetée sur la courbe et réduits davantage les rejets. Les points H et M, correspondent à une alimentation hybride à trois phases ayant un coût compris entre celui d’une alimentation MC-3PF-EF et MC-1MF-EL (95.66 et 68.39 pour les données de 2011 et 2016 respectivement) et réduisant les rejets de 8% et 9% pour le phosphore et 10% et 15% pour l’azote respectivement. Enfin, tous les points situés sous ces courbes réduisent simultanément le coût de l’alimentation est les rejets de phosphore et d’azote (par exemple les points F et K).

Conclusion

La prise en compte des rejets environnementaux dans l’alimentation porcine est liée à la stratégie alimentaire utilisée. L’approche ε -contraintes que nous avons présenté dans cette section permet d’estimer le coût de l’alimentation en fonction des rejets de P et de N. Nous pouvons en extraire un graphique en trois dimensions qui permet une visualisation simple et

rapide d'une infinité de solutions. Ces surfaces permettent à l'utilisateur de choisir un taux de rejets de P et de N et d'observer le coût de l'alimentation associé. Un compromis entre P excrété, N excrété et coût de l'alimentation peut ainsi être trouvé et correspondre au besoin de chaque producteur.

Les résultats ont fait l'objet d'une présentation et d'un article dans le proceeding de conférence des 48^e et 49^e Journées de recherche porcine (annexe A et B). À la suite de ces conférences, nous avons été contactés par la revue Techporc afin d'écrire un article vulgarisé présentant des méthodes (annexe C).

4.2 Optimisation robuste

Ce chapitre est dédié à l'optimisation dite robuste, qui consiste à résoudre un problème d'optimisation en prenant en compte différentes incertitudes. Les premiers travaux d'optimisation robuste datent des années 1950 avec des "analyses de cas le plus défavorable" et le modèle maximin de Wald [106]. C'est dans ce sens-là que nous avons appliqué cette branche de l'optimisation à notre problème de diète porcine.

En effet, les incertitudes par lesquelles nous pouvons être impactées concernent les prix des aliments. La plupart des ingrédients étant cotés en bourse, leur valeur sont incertaines. Nous allons donc, dans la suite de ce chapitre, les considérer comme variables, contrairement à ce qui a été fait dans les études précédentes, où nous prenions en compte le prix moyen sur une année.

Dans une première partie, nous utiliserons l'optimisation en pire cas. Nous cherchons à déterminer une solution à coût minimum, quel que soit le contexte de prix.

La seconde partie de ce chapitre se concentrera sur l'optimisation bi-niveaux ce qui nous permet de déterminer le pire et le meilleur scénario de prix pour la mise en place d'une alimentation par mélanges (MC-1MF-EL).

Contexte de prix	MC-IF-EL	MC-3PF-EF	MC-1MF-EL
novembre	81.80	86.78	83.11
Décembre	81.27	86.38	82.80
Janvier	86.93	90.62	87.50
Février	90.41	94.93	91.21
Mars	95.36	100.87	96.50
Avril	98.69	104.45	99.91
Mai	97.20	102.04	98.32
Juin	98.86	105.06	100.27
Juillet	97.73	103.93	99.23
Août	99.85	107.75	101.39
Septembre	100.58	109.91	102.23
Octobre	100.46	106.72	101.92
Prix moyen	94.84	100.33	96.23

Tableau 4.2 – Coût de l'alimentation en fonction du contexte de prix.

Les études suivantes n'ont été réalisées qu'avec les données de 2011, car nous ne disposions pas des données mensuelles sur l'année 2016.

4.2.1 Optimisation du pire mois

Dans cette section, nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps, nous allons observer et commenter les variations du coût d'alimentation en fonction du scénario de prix considéré. Nous allons procéder ainsi pour les trois types de formulations de base (MC-3PF-EF, MC-IF-EL et MC-1MF-EL). La seconde partie sera consacrée à l'optimisation en pire cas à proprement parler. Pour ces deux cas, nous allons considérer 12 jeux de prix différents, chacun correspondant aux prix enregistrés par Aliments Breton au début de chaque mois de novembre 2011 à octobre 2012.

4.2.1.1 Observation de l'impact du prix des ingrédients sur le coût de l'alimentation

Nous avons donc, dans un premier temps, résolu les problèmes d'optimisation pour les 12 jeux de prix. Le tableau 4.2 nous montre que les fluctuations des prix des ingrédients ont un

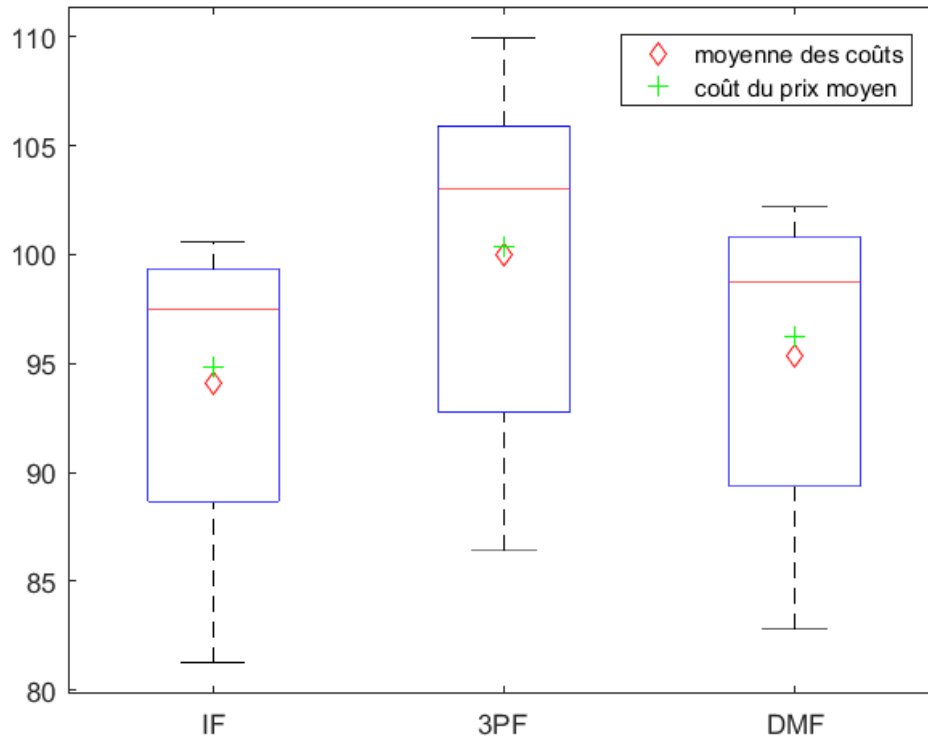


Figure 4.5 – Répartition des coûts en fonction des alimentations.

fort impact sur le coût des alimentations.

On peut constater que la différence entre le coût minimum et le coût maximum d'une même alimentation est de plus de 19\$, soit environ 20%, et cela quel que soit l'alimentation considérée. La figure 4.2 est la représentation en diagrammes en boîte des variations des coûts d'alimentation lorsque le prix des ingrédients varie, pour les méthodes MC-IF-EL, MC-3PF-EF et MC-1MF-EL. On y note la valeur minimale et maximale du coût de l'alimentation (points minimal et maximal de chaque graphique), les 2^{ème} et 3^{ème} quartiles (extrémités supérieure et inférieure de la boîte) ainsi que la médiane (ligne rouge du diagramme).

On remarque également que la moyenne des coûts (point marqué d'un losange rouge) est proche du coût déterminé avec le prix moyen des ingrédients (point marqué d'un signe + sur la figure 4.2), avec des différences de -0.80%, -0.36% et -0.91% pour les alimentations

MC-IF-EL, MC-3PF-EF et MC-1MF-EL respectivement.

4.2.1.2 Détermination de la solution en pire cas

Nous allons, dans cette seconde partie, chercher une solution robuste à la variation des prix des matières premières. Nous voulons donc déterminer une solution telle que, quel que soit le contexte de prix utilisé par la suite, le coût soit le plus faible possible. Considérons le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min_x & f_c(x) \\ \text{s.à} & x \in X. \end{cases}$$

L'optimisation en pire cas de ce problème consiste à prendre différentes valeurs de c . Soit n vecteurs coûts, notés c_1, \dots, c_n , et f_{c_1}, \dots, f_{c_n} les fonctions coût associées. Nous résolvons alors le problème

$$\begin{cases} \min_{x,v} & v \\ \text{s.à} & x \in X, \\ & f_{c_1}(x) \leq v, \\ & \vdots \\ & f_{c_n}(x) \leq v. \end{cases}$$

Les résultats de ces simulations sont regroupés dans le tableau 4.3. On y retrouve, pour chaque alimentation et chaque prix, le coût de celle-ci en considérant la solution du problème en pire cas. Nous pouvons constater une hausse générale du coût de l'alimentation. De plus, les contextes de prix des mois de septembre et octobre correspondent dans les trois cas aux mois coûtants les plus chers. Pour une alimentation MC-3PF-EF, seul le mois de septembre est restreignant puisque la solution robuste et la solution optimale dans le contexte de prix ont le même coût. Pour une alimentation MC-IF-EL, les deux sont limitants, car la solution robuste retourne un coût identique que le contexte de prix "Septembre" ou "Octobre" soit utilisé. Un compromis entre les 12 contextes différents a été déterminé.

Contexte de prix	MC-IF-EL	MC-3PF-EF	MC-1MF-EL
novembre	82.86	90.21	84.82
Décembre	82.67	89.88	84.69
Janvier	91.48	92.53	93.01
Février	96.11	96.51	97.61
Mars	97.57	103.49	99.28
Avril	100.38	106.78	102.11
Mai	100.04	105.19	101.56
Juin	99.05	106.10	100.67
Juillet	98.18	105.95	99.86
Août	99.88	108.12	101.42
Septembre	100.82	109.91	102.49
Octobre	100.82	108.69	102.46
Moyenne	95.82	101.95	97.50

Tableau 4.3 – Coût de l'alimentation en fonction du contexte de prix en considérant la solution robuste.

4.2.2 Optimisation biniveau

Dans cette seconde section, nous avons cherché à connaître le contexte de prix le plus favorable et le moins favorable à la mise en place d'une alimentation MC-1MF-EL. La situation la plus favorable sera celle qui maximise l'écart entre une alimentation traditionnelle MC-3PF-EF et l'alimentation par mélanges MC-1MF-EL, tandis que la situation la plus défavorable sera, au contraire, celle qui le minimise. Nous allons utiliser pour cela la programmation biniveau.

La programmation biniveau a été introduite pour la première fois dans le domaine de la théorie des jeux par Von Stackelberg en 1934 [104], où il décrit un problème hiérarchique. Mais le premier article traitant vraiment des propriétés des problèmes biniveaux date de 1973 [25]. Il est aujourd'hui très répandu pour différents types de problèmes ayant des applications réelles, telles que la biologie, les sciences économiques ou encore l'ingénierie. Ce genre de problème a la particularité d'avoir deux problèmes imbriqués l'un dans l'autre et est modélisé

de manière générale par

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X, y \in Y} F(x, y) \\ \text{s.à} \quad G(x, y) \leq 0, \\ y \in \arg \min_{z \in Y} \{f(x, z) | g(x, z) \leq 0\}. \end{array} \right.$$

Le problème $\min F(x, y)$ est appelé problème supérieur et $\min f(x, y)$ problème inférieur. Chacun des problèmes, supérieur ou inférieur, peut également être considéré comme un problème de maximisation.

Dans le cas de notre étude, nous allons considérer deux problèmes différents. Notons f_{3PF}^c et f_{DMF}^c les fonctions représentant le coût de l'alimentation MC-3PF-EF et MC-1MF-E associées aux prix c . Nous cherchons à maximiser, respectivement minimiser, l'écart entre ces deux alimentations en fonction du prix des ingrédients qui pourront varier entre deux bornes. Le problème que nous considérons peut donc être écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{c, x_1, x_2, y_1, y_2, X} f_{3PF}^c(X^*) - f_{DMF}^c(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \\ \text{s.à} \quad X^* \in \arg \min_X \{f_{3PF}^c(X) | X \in S\}, \\ (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \in \arg \min_{x_1, x_2, y_1, y_2} \{f_{DMF}^c(x_1, x_2, y_1, y_2) | (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S\}, \\ l_c \leq c \leq u_c, \end{array} \right.$$

respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{c, x_1, x_2, y_1, y_2, X} f_{3PF}^c(X^*) - f_{DMF}^c(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \\ \text{s.à} \quad X^* \in \arg \min_X \{f_{3PF}^c(X) | X \in S\}, \\ (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) \in \arg \min_{x_1, x_2, y_1, y_2} \{f_{DMF}^c(x_1, x_2, y_1, y_2) | (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S\}, \\ l_c \leq c \leq u_c. \end{array} \right. .$$

Le problème de niveau supérieur a été implémenté en Matlab et résolu grâce à un algorithme de "Mesh Adaptive Direct Search" (MADS) [1, 63]. Les problèmes de niveaux inférieurs, appelés à chaque itération de l'algorithme MADS, ont été implémentés en AMPL.

Nous avons appliqué cette approche sur nos données. Nous disposons de 12 ensembles de prix. Les variations étant restreintes, nous avons considéré les bornes

$$l_c = 0.8 \times \min \{c_t, t = \{1, \dots, 12\}\},$$

		Coûts			Diff. 3PF-DMF		Diff. DMF-IF	
		3PF	DMF	IF	(\$)	(%)	(\$)	(%)
min	3PF-DMF	77.1543	76.5163	76.1444	0.6379	-0.83	0.3719	-0.48
	DMF-IF	86.6515	85.0552	85.0362	1.5963	-1.84	0.0192	-0.02
max	3PF-DMF	98.6738	76.0234	73.2069	22.6504	-22.95	2.8165	-2.85
	DMF-IF	97.5330	78.8362	75.7205	18.6968	-19.17	3.1156	-3.19

Tableau 4.4 – Résultats des problèmes biniveaux déterminant le contexte de prix le plus et le moins favorable à la mise en place d’une alimentation MC-1MF-EL.

$$u_c = 1.2 \times \max \{c_t, t = \{1, \dots, 12\}\}$$

pour la variable c . Nous avons également appliqué cette approche afin de déterminer l’écart maximal (respectivement minimal) entre une alimentation MC-1MF-EL et l’alimentation idéale MC-IF-EL.

Le tableau 4.4 regroupe les résultats. La première constatation que nous pouvons faire est que la plus petite économie réalisée lors de la mise en place d’une alimentation MC-1MF-EL est quand même de 0.83% . Dans la meilleure situation, nous pouvons aller jusqu’à réaliser une économie de près de 23%. Deuxièmement, on peut remarquer que l’alimentation MC-1MF-EL a un écart maximum de 3.2% par rapport au modèle d’alimentation MC-IF-EL, mais peut, dans le meilleur des cas être quasiment équivalent, avec un écart de seulement 0.02%.

Pour conclure, cette approche nous a permis de noter que la mise en place d’une alimentation par mélanges permet de réaliser jusqu’à 23% d’économie sur le coût de l’alimentation dans le meilleur des cas, mais également que le coût d’une telle alimentation est toujours proche de celui de l’alimentation idéale, à maximum 3.19%.

Conclusion

La prise en compte des rejets environnementaux dans l’alimentation porcine est liée à la stratégie alimentaire utilisée. L’approche ε -contraintes que nous avons présenté dans cette section permet d’estimer le coût de l’alimentation en fonction des rejets de P et de N. Nous pouvons en extraire un graphique en trois dimensions qui permet une visualisation simple et

rapide d'une infinité de solutions. Ces surfaces permettent à l'utilisateur de choisir un taux de rejets de P et de N et d'observer le coût de l'alimentation associé. Un compromis entre P excrété, N excrété et coût de l'alimentation peut ainsi être trouvé et correspondre au besoin de chaque producteur.

Les résultats ont fait l'objet d'une présentation et d'un article dans le proceeding de conférence des 48^e et 49^e Journées de recherche porcine (annexe A et B). À la suite de ces conférences, nous avons été contactés par la revue Techporc afin d'écrire un article vulgarisé présentant des méthodes (annexe C).

Nous présentons ensuite deux aspects de l'optimisation robuste. On a pu constater qu'utiliser le prix moyen des ingrédients sur une année est finalement très proche de la moyenne du prix constater pour chaque mois, avec une différence de moins de 1% pour chacune des alimentations que nous avons considérées (idéale, traditionnelle et par mélanges). Le coût de l'alimentation est cependant assez variable avec une amplitude d'environ 20%. L'utilisation de l'optimisation en pire cas permet de déterminer un compromis entre les différents contextes de prix afin de minimiser le coût de l'alimentation, quel que soit le contexte de prix futur. On note cependant une hausse générale du coût de l'alimentation.

Enfin l'optimisation biniveau nous a permis de déterminer le contexte de prix le plus (respectivement le moins)favorable à la mise en place d'une alimentation par mélanges. On a cherché les prix des ingrédients tels que la différence entre le coût de l'alimentation traditionnelle et le coût de l'alimentation par mélanges soit la plus grande (respectivement la plus petite). Ainsi l'économie maximale réalisée est de près de 23%, tandis que nous réaliserons au moins une économie de 0.83% avec la mise en place d'une alimentation par mélanges.

CHAPITRE 5

Perspectives : modélisation pour un troupeau

L'un des objectifs pratiques à court terme est la mise en place d'une alimentation de précision dans les exploitations. L'alimentation de précision est une alimentation individuelle propre à chaque animal. En effet, dans les méthodes présentées précédemment, l'aliment était formulé à partir de besoins moyens et était identique pour tous les animaux d'un troupeau. Or, comme dans tout groupe, le potentiel de croissance et les besoins varient d'un porc à l'autre. Dans ce cas, certains animaux verront leur croissance pénalisée en début d'engraissement à cause d'une carence, alors que d'autres auront un apport trop important en nutriments ce qui entraînera un gaspillage des matières azotées.

Une façon d'éviter ces situations est de procéder avec une alimentation de précision. Le but est, comme pour l'alimentation par mélange MC-1MF-EL, de déterminer deux prémélanges qui seront distribués de manière personnalisée pour chaque animal, c'est-à-dire que les quantités de chacun des prémélanges seront individualisées.

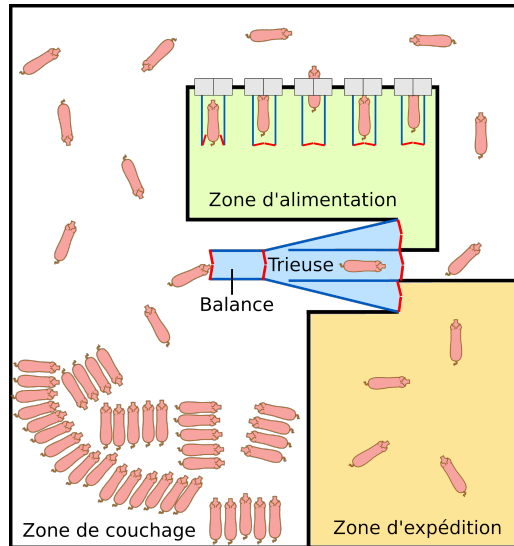


Figure 5.1 – Fonctionnement d'une porcherie appliquant l'alimentation de précision.

5.1 Fonctionnement d'une porcherie

Pour accéder aux mangeoires, chaque animal doit passer individuellement dans un dispositif appelé "trieuse". Il est dans un premier temps identifié et pesé avant d'être envoyé dans l'une des trois directions possibles. Si son poids dépasse les 130 kg, il est envoyé dans la zone d'expédition en attendant son départ pour l'abattoir. S'il n'a pas mangé sa ration quotidienne et qu'une mangeoire est libre, il est envoyé soit dans la zone d'alimentation, et sinon, il est renvoyé dans la zone de couchage (figure 5.1). Ainsi, nous sommes capables de déterminer quel animal entre dans quelle mangeoire et de lui donner une quantité appropriée des mélanges.

5.2 Modélisation de l'alimentation d'un troupeau

D'un point de vue modélisation, cette alimentation se traduit par l'augmentation du nombre de variables et de contraintes. En effet, prenons en exemple l'alimentation MC-1MF-EL, seulement deux prémélanges sont utilisés pour tous les animaux et toute la durée de la croissance, mais les quantités de chacun des aliments données quotidiennement sont spécifiques à

chaque animal. Ainsi, le modèle possède $2|I|$ variables, correspondant aux deux prémélanges utilisés, complétés par $2|J|$ variables pour chacun des animaux du troupeau, correspondant aux quantités journalières d'aliments. Si l'on note $K = \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des cochons du troupeau, nous avons un total de $2(|I| + |K||J|)$ variables. La variable Q évolue légèrement et devient une matrice à trois dimensions qui peut être représentée par $Q = (q_{kja})_{k \in K, j \in J, a \in A}$. Les contraintes correspondant aux besoins sont au nombre de $|N||J| + 2$ pour chaque animal, soit un total de $|K|(|N||J| + 2)$, auxquelles nous ajoutons 2 contraintes de proportion sur les mélanges ainsi que les contraintes de bornes. Le modèle représentant cette alimentation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X, Q} & \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} q_{kj1} (c^t x_{.1}) + q_{kj2} (c^t x_{.2}) \right) \\ \text{s.à} & \begin{array}{ll} \underline{b}_{nj} \leq m_n \cdot (q_{kj1} x_{.1} + q_{kj2} x_{.2}) \leq \bar{b}_{nj}, & \forall n \in N, \forall k \in K, \forall j \in J, \\ m_E (q_{kj1} x_{.1} + q_{kj2} x_{.2}) = e_j, & \forall k \in K, \forall j \in J, \\ \sum_{a \in A} q_{kja} \leq W_j^{\max}, & \forall k \in K, \\ q_{kja} \geq 0, & \forall k \in K, \forall j \in J, \forall a \in A, \\ 0 \leq x_{ia} \leq x_i^{\max}, & \forall a \in A, \forall i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1, & \forall a \in A, \end{array} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

ou de manière simplifiée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X, Q} & \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} q_{kj1} (c^t x_{.1}) + q_{kj2} (c^t x_{.2}) \right) \\ \text{s.à} & (q_{kj1} x_{.1} + q_{kj2} x_{.2}) \in S_{kj}, \quad \forall k \in K, \forall j \in J, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

où S_{kj} est l'ensemble réalisable pour l'animal k . De même que pour les modèles présentés précédemment dans ce chapitre le problème (5.1) est un problème très difficile d'optimisation bilinéaire sous contraintes bilinéaires. Le chapitre 2 présente les propriétés (qualités et inconvénients) de ce type de problème.

5.3 Données utilisées

Nous avons généré les données du troupeau à partir de données réelles enregistrées par Agriculture Canada. Nous disposons, pour 14 animaux, de la quantité ingérée quotidiennement

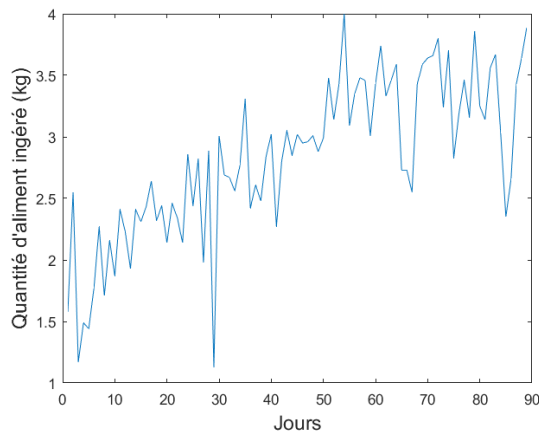


Figure 5.2 – Quantité d'aliment ingéré quotidiennement par le porc n°6 (données brutes).

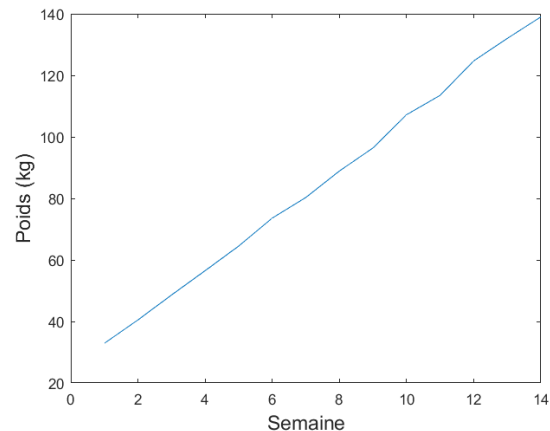


Figure 5.3 – Poids vif hebdomadaire du porc n°6 (données brutes).

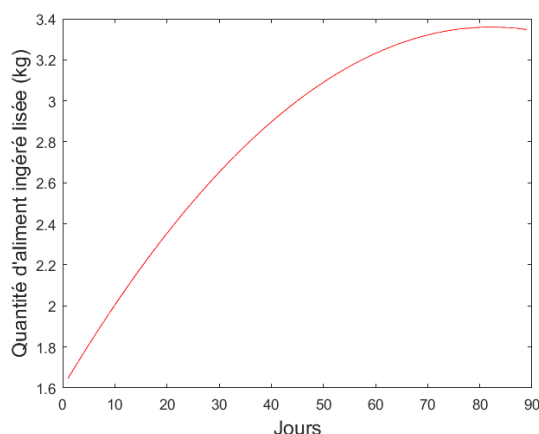


Figure 5.4 – Quantité d'aliment ingéré quotidiennement par le porc n°6 (données lissées).

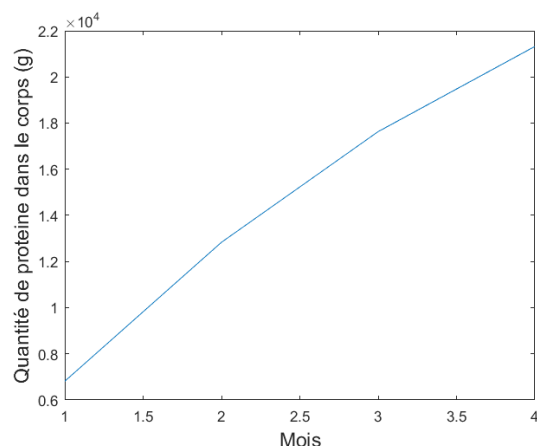


Figure 5.5 – Quantité de protéine dans le corps du porc n°6 (données brutes).

(exemple pour le porc n°6 sur la figure 5.2), du poids vif à chaque semaine (exemple pour le porc n°6 sur la figure 5.3) et de la quantité de protéine à chaque début de mois (exemple pour le porc n°6 sur la figure 5.5). A partir des valeurs connues, nous avons utilisé une interpolation afin d'estimer des données quotidiennes pour chacune des catégories et de manière à ce qu'elles soient lisses (exemple de la quantité d'aliments ingérée pour le porc n°6 sur la figure 5.4). La quantité ingérée permet de déterminer le besoin en énergie, le poids vif permet de déterminer la capacité d'ingestion, à savoir la quantité maximale d'aliments ingérés chaque jour, et la protéine permet de déterminer les besoins de tous les nutriments.

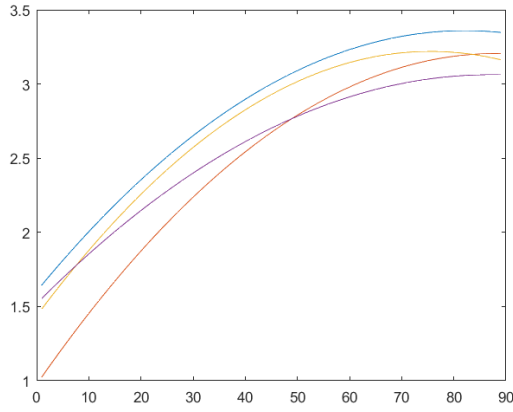


Figure 5.6 – 1^{er} groupe d'animaux dont la croissance est semblable.

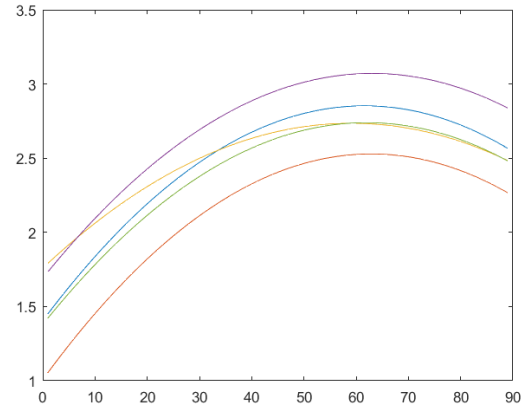


Figure 5.7 – 2nd groupe d'animaux dont la croissance est semblable.

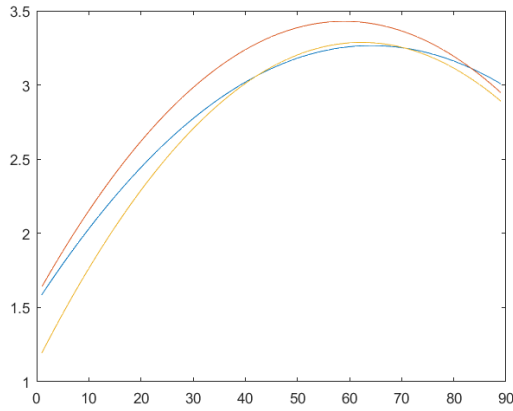


Figure 5.8 – 3^e groupe d'animaux dont la croissance est semblable.

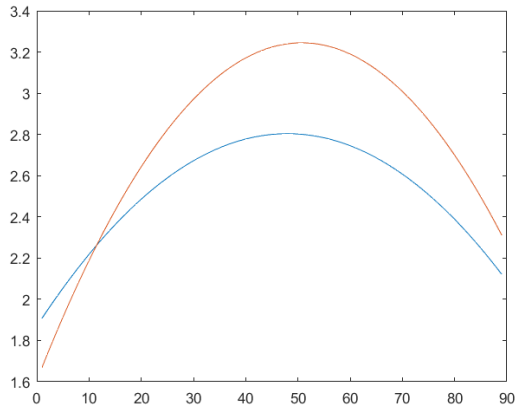


Figure 5.9 – 4^e et 5^e groupe d'animaux.

À partir des données de ces 14 animaux, nous avons fait ressortir cinq groupes d'animaux dont la croissance, ou plus précisément le besoin en énergie, sont semblables. Les cinq groupes sont représentés dans les figures 5.6 à 5.9.

Nous choisissons ensuite un animal témoin pour chaque groupe et nous créons des variations des besoins de ces cinq animaux initiaux afin d'obtenir de plus grands troupeaux. Pour créer ces variations, nous avons procédé, pour chaque groupe, de la manière suivante :

- soit $p \in [0.9, 1.1]$, un pourcentage de l'animal témoin,
- soit $v_n \in [-0.01, 0.01], \forall n \in N$,

- $\forall n \in N, \forall j \in J, \bar{b}_{nj} = (p + v_n)\bar{b}_{nj}^{temoin}$ et $\underline{b}_{nj} = (p + v_n)\bar{b}_{nj}^{temoin}$.

Nous répétons ensuite ce procédé autant de fois que nous souhaitons d'animaux du même groupe.

Cette méthode permet d'obtenir une variation générale de comportement par rapport à l'animal témoin (pourcentage p), tout en ayant de légères modifications des besoins (pourcentage v_n), permettant ainsi que l'animal créé ne soit pas une simple translation de $p\%$ de l'animal témoin. Ainsi, les animaux créés avec cette méthode ont un comportement général semblable tout en étant tous différents.

5.4 Résultats numériques

Dans un premier temps, nous avons appliqué les alimentations MC-3PF-EF, MC-1MF-EL et MC-IF-EL sur différentes tailles de troupeaux (5 à 55 animaux par pas de 5). En résolvant ces problèmes à l'aide du solveur non linéaire Ipopt, nous avons pu constater la continuité des résultats obtenus pour un animal moyen. Le tableau 5.1 montre la valeur optimale à la solution de chacune des trois alimentations avec les données de 2011 et le tableau 5.2 celles en considérant les données de 2016. L'alimentation par mélanges MC-1MF-EL est en moyenne 10.03% et 14.35% moins chère que l'alimentation traditionnelle MC-3PF-EF considérant les données de 2011 et 2016 respectivement, tout en étant à 0.56% et 1.44% de l'alimentation idéale MC-IF-EL.

L'étude sur l'impact environnemental d'une telle alimentation appliquée au troupeau est légèrement différente de celles effectuées précédemment. En effet, nous ne disposons pas de la quantité de phosphore et d'azote retenu par chaque animal et nous ne pouvons pas évaluer les quantités rejetées. En revanche, nous avons effectué l'étude sur les quantités de phosphore et d'azote ingérées.

taille du troupeau		MC-3PF-EF	MC-1MF-EL		MC-IF-EL	
		\$	\$	%	\$	%
Coût de l'alimentation	5	417.67	376.84	-9.78	374.37	-10.37
	10	838.35	755.954	-9.83	750.97	-10.42
	15	1237.01	1115.52	-9.82	1108.14	-10.42
	20	1669.53	1503.84	-9.92	1493.92	-10.52
	25	2060.00	1854.73	-9.96	1842.47	-10.56
	30	2542.31	2287.50	-10.02	2272.29	-10.62
	35	2935.45	2639.17	-10.09	2621.39	-10.70
	40	3346.52	3012.25	-9.99	2992.05	-10.59
	45	3798.04	3414.15	-10.11	3391.30	-10.71
	50	4160.41	3741.97	-10.06	3716.80	-10.66
	55	4605.61	4136.13	-10.19	4108.53	-10.79
Phosphore ingéré		Kg	Kg	%	Kg	%
	5	5.835	5.217	-10.59	5.190	-11.07
	10	11.718	10.467	-10.68	10.404	-11.22
	15	17.277	15.443	-10.61	15.350	-11.15
	20	23.294	20.835	-10.55	20.708	-11.10
	25	28.868	25.684	-11.03	25.542	-11.52
	30	35.531	31.683	-10.83	31.505	-11.33
	35	41.022	36.560	-10.88	36.355	-11.38
	40	46.764	41.721	-10.78	41.483	-11.29
	45	53.066	47.291	-10.88	47.020	-11.39
	50	58.223	51.821	-11.00	51.525	-11.50
	55	64.384	57.277	-11.04	56.956	-11.54
Azote ingéré		Kg	Kg	%	Kg	%
	5	25.094	21.086	-15.97	20.448	-18.52
	10	50.365	42.308	-16.00	41.003	-18.59
	15	74.295	62.426	-15.98	60.493	-18.58
	20	100.317	84.200	-16.07	81.576	-18.68
	25	123.601	103.841	-15.99	100.638	-18.58
	30	152.630	128.077	-16.09	124.158	-18.65
	35	176.120	147.849	-16.05	143.228	-18.68
	40	200.789	168.619	-16.02	163.399	-18.62
	45	227.998	191.117	-16.18	185.201	-18.77
	50	249.533	209.519	-16.04	203.018	-18.64
	55	276.458	231.553	-16.24	224.394	-18.83

Tableau 5.1 – Valeur optimale, P excrété et N excrété des différentes alimentations avec les prix de 2011 et comparaison MC-1MF-EL et MC-IF-EL avec MC-3PF-EF.

taille du troupeau		MC-3PF-EF	MC-1MF-EL		MC-IF-EL	
		\$	\$	%	\$	%
Coût de l'alimentation	5	309.46	265.86	-14.09	261.48	-15.51
	10	621.83	534.04	-14.12	525.20	-15.54
	15	920.38	786.22	-14.58	773.06	-16.01
	20	1237.87	1060.99	-14.29	1043.10	-15.73
	25	1547.00	1323.40	-14.45	1301.02	-15.90
	30	1845.08	1582.28	-14.24	1555.66	-15.69
	35	2159.80	1846.44	-14.51	1815.48	-15.94
	40	2472.29	2119.03	-14.29	2083.42	-15.73
	45	2783.93	2384.20	-14.36	2343.81	-15.81
	50	3098.95	2650.28	-14.48	2605.50	-15.92
	55	3447.62	2948.57	-14.48	2898.50	-15.93
Phosphore ingéré		Kg	Kg	%	Kg	%
	5	5780.32	5677.55	-1.78	4728.48	-18.20
	10	11.616	11.411	-1.76	9.488	-18.32
	15	17.142	16.801	-1.99	13.985	-18.41
	20	23.027	22.672	-1.54	18.857	-18.11
	25	28.893	28.283	-2.11	23.516	-18.61
	30	34.467	33.808	-1.91	28.105	-18.46
	35	40.377	39.451	-2.29	32.806	-18.75
	40	46.122	45.263	-1.86	37.621	-18.43
	45	52.006	50.965	-2.00	42.386	-18.50
	50	57.612	56.657	-1.66	47.125	-18.20
	55	64.403	63.056	-2.09	52.454	-18.55
Azote ingéré		Kg	Kg	%	Kg	%
	5	23918.50	22.931	-4.13	20212.50	-15.49
	10	48.065	46.046	-4.20	40.568	-15.60
	15	71.291	67.747	-4.97	59.757	-16.18
	20	95.855	91.491	-4.55	80.631	-15.88
	25	119.807	114.050	-4.81	10.0537	-16.08
	30	142.636	136.383	-4.38	12.0210	-15.72
	35	167.247	159.191	-4.82	14.0292	-16.12
	40	191.345	182.591	-4.57	16.0919	-15.90
	45	215.391	205.544	-4.57	18.1228	-15.86
	50	240.095	228.523	-4.82	20.1446	-16.10
	55	266.965	254.190	-4.79	22.4152	-16.04

Tableau 5.2 – Valeur optimale, P excrété et N excrété des différentes alimentations avec les prix de 2016 et comparaison MC-1MF-EL et MC-IF-EL avec MC-3PF-EF.

Conclusion

Cette étude préliminaire sur l'alimentation personnalisée de chaque individu d'un troupeau permet de constater une réduction plus importante que pour l'alimentation d'un animal moyen. En effet, dans la section 1.3.4, le coût de l'alimentation MC-1MF-EL était réduit d'environ 4% pour les données de 2011 et de 6.7% pour les données de 2016. Sur un troupeau entier, ce coût est réduit d'environ 10% lorsque nous utilisons les données de 2011 et de plus de 14% sur les données de 2016. Nous pouvons également remarquer que la consommation de P et de N est réduite, quel que soit le contexte de prix considéré.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette thèse propose (chapitre 1) une nouvelle modélisation de diète porcine : l'alimentation hybride. cette nouvelle formulation est une combinaison de l'alimentation par phases et l'alimentation par mélanges. Nous avons montré que pour un nombre de phases égal à 3, elle permet de réduire le coût d'alimentation de 5.19% et 8.49% lorsqu'elle est appliquée les données de 2011 et 2016 respectivement, soit une réduction supplémentaire 1.19% et 1.8% respectivement que l'alimentation par mélange. Notons que plus le nombre de phases augmente, plus le coût de l'alimentation diminue. Cependant, nous pouvons remarquer que la différence entre les méthodes MC-3HF-EL et MC-4HF-EL est assez faible et que les résultats obtenus ne sont qu'à 0.29% et 0.37% respectivement de l'alimentation idéale. Ainsi, augmenter significativement le nombre de phases de l'alimentation hybride ne permettra pas à une diminution importante du coût de l'alimentation. Nous montrons en effet que les modèles sont ordonnés en fonction de la valeur optimale. L'alimentation hybride aura toujours une valeur plus élevée que l'alimentation idéale, mais sera plus faible qu'une alimentation par mélange.

Les modèles bilinéaires introduits dans le chapitre 1 sont non-convexe et peuvent avoir plusieurs minima. Dans le but de les résoudre globalement (chapitre 2), nous prouvons que ces problèmes sont fortement NP-difficiles grâce à la modélisation sous forme d'un problème de pooling. De plus, nous énonçons la conjecture suivante : "tout minimum local est global pour le problème de diète porcine". Les problèmes géométriques possèdent des caractéristiques communes avec le problème de diète porcine et nous savons obtenir son minimum global.

Cependant, les différences entre ces deux problèmes nous empêchent d'appliquer cette méthode pour la diète porcine, mais il est possible d'obtenir une preuve de la conjecture sur un exemple de dimension réduite.

Les méthodes de résolutions globales ne pouvant pas être appliquées à notre problème à cause de sa dimension, nous présentons dans le chapitre 3 différentes méthodes de relaxation. Nous utilisons des approches de pénalisation, de discrétisation, de relaxations lagrangienne et de relaxations convexes (McCormick, Tawarmalani et SDP). Toutes ces approches supportent notre conjecture. Nous montrons également que sous certaines hypothèses, la relaxation de McCormick et la relaxation SDP ont la même valeur optimale que le problème idéal.

Des extensions des modèles bilinéaires sont présentées dans le chapitre 4. Nous faisons dans un premier temps une étude intégrant les rejets environnementaux. Grâce à l'approche ε -contraintes, une multitude de solutions permettant de réduire les rejets de P et de N. Chaque utilisateur pourra ainsi obtenir, selon ses besoins, l'alimentation appropriée. Des compromis entre rejets de P, rejets de N et coût d'alimentation peuvent être déterminés. Nous continuons avec une étude sur la robustesse des solutions à la variation du prix des matières premières. L'optimisation robuste et biniveau permet d'étudier le comportement du modèle sur la variation des prix des matières premières. Nous avons ainsi pu constater que la mise en place d'une alimentation par mélanges engendre un coût au plus à 3.2% supérieur à l'alimentation idéale et permet de réduire jusqu'à 23% le coût de l'alimentation, par rapport à une alimentation traditionnelle.

Pour finir, l'étude préliminaire sur l'alimentation d'un troupeau (chapitre 5), c'est-à-dire où chaque animal a une alimentation personnalisée, montre une réduction supplémentaire du coût de l'alimentation comme attendue.

Comme perspective à ce travail, nous pouvons étudier plus précisément la modélisation de l'alimentation d'un troupeau.

Dans un premier temps, il est envisagé prolonger ce qui a été fait ici, c'est-à-dire une étude où les besoins de tous les animaux sont satisfaits quotidiennement. Il faudra évaluer l'impact

économique des alimentations pHF , pour différentes valeurs de p .

Dans un second temps, il faudra envisager le cas où les animaux ayant les plus forts besoins sont mis en carence en début de croissance afin de réduire le coût de l'alimentation. Or, cette carence entraînera un retard de croissance qui impactera les besoins des animaux les jours suivants. Il faudra donc pour cela élaborer un programme couplé avec un logiciel de simulation de croissance tel qu'InraPorc [102]. Cela permettra de mettre à jour en temps réel les besoins des animaux en cas de carence. Le but de cette étude sera alors de trouver un compromis sur l'alimentation qui mettra un pourcentage du troupeau en carence les premiers jours de manière à ce qu'elle coûte moins cher et que le retard de croissance des animaux pris avec cette alimentation ne fasse pas perdre d'argent aux éleveurs lors de l'abattage.

Formations complémentaires et participations aux conférences

En plus des travaux réalisés qui ont été présentés dans ce document, les trois années de thèse m'ont permis de suivre des formations complémentaires, scientifique ou non, et de participer à des conférences.

J'ai eu l'opportunité de suivre des formations complémentaires en optimisation en participant au cours ROP 771 (Programmation mathématique) et ROP 831 (Algorithmes en programmation non linéaire) à l'Université de Sherbrooke ainsi qu'à un mini-cours organisé par le GDR MOA à Toulouse les 21 et 22 mars 2016 ("Formal methods in optimization engineering" par Eric Féron et "Problèmes de contrôle" par Frédéric Bonnans). J'ai également participé à l'école d'été "COST/MINO PhD School on Advanced Optimization Methods" qui a eu lieu à Rome du 10 au 16 juin 2016 qui regroupait 4 mini-cours ("Polyhedral Combinatorics" par Santanu S. Dey, "Interior Point Methods" par Jordi Castro, "Advanced Dantzig-Wolfe Decomposition" par Antonio Frangioni et "Semidefinite Programming" par Veronica Piccialli). Enfin, j'ai suivi le séminaire du programme Gaspard Monge donné par Marc Teboulle qui s'intitulait "First Order Optimization Methods".

Par ailleurs, la Semaine d'Étude Math-Entreprise (SEME), organisé par AMIES à Nice du 25 au 29 janvier 2016, m'a permis de mettre mes connaissances en optimisation au service de l'entreprise Exact Cure, une start-up de Dassault Systèmes, lors du projet intitulé "Recalibration de modèles pharmacocinétiques".

Ces trois années m'ont également permis de participer à des tâches d'encadrement et de monitorat. J'ai donné des cours à l'INSA sur les années 2015/2016 (52h d'Analyse 3 en 2ème année de Licence et 14h d'Analyse 2 en 1ère année de Licence) et 2017/2018 (52h d'Analyse 3 en 2ème année de Licence) et à l'Université de Sherbrooke aux sessions d'hiver 2015 (13h de ROP630 - Programmation non linéaire aux étudiants de Baccalauréat, équivalant à un niveau L3/M1 en France), d'été 2015 (ROP542 - Éléments d'optimisation aux étudiants de Baccalauréat, équivalant à un niveau L3 en France), d'automne 2016 (MAT128 - Éléments d'analyse aux étudiants de Baccalauréat, équivalent L1 en France) et d'hiver 2017 (MAT221 - Calcul différentiel et intégral aux étudiants année de Baccalauréat, équivalent L1/L2 en

France). J'ai également eu l'opportunité d'encadrer un groupe de trois étudiants de 4ème année de Génie Mathématiques de l'INSA lors d'un Bureau d'Étude proposé par l'INRA de Rennes ("Développement de méthodes pour l'application en temps réel de modèles de prédiction des besoins nutritionnels et des performances dans le cadre de l'alimentation de précision en élevage").

J'ai participé tout au long de ma thèse à plusieurs conférences et séminaires afin de présenter mes travaux :

- Exposés lors de séminaires :
 - Feeding cost optimization of several diet formulations and environmental impact in the swine industry, séminaire CREI, Sherbrooke, Canada, 27 janvier 2015.
 - Feeding cost and excretion optimization in the swine industry, séminaire Landau, Rennes, France, 17 mai 2016.
- Exposés lors de conférences :
 - Optimisation des Coûts d'Alimentation et des Rejets chez le Porc Charcutier. 48es Journées de la Recherche Porcine, Paris, France, 2-3 février 2016.
 - Feeding cost and excretion optimization in the swine industry. HJ2016 : Hamilton-Jacobi Equations : new trends and applications, Rennes, France, 30 mai-3 juin 2016.
 - Minimization of feeding cost in swine industry : determine the global minimum of a bilinear problem. Troisièmes Journées Scientifiques du GT Programmation Mathématique du GDR RO, Rennes, France, 13-14 juin 2016.
 - Nouvelle méthode d'alimentation hybride : un mixte de l'alimentation traditionnelle par phases et par mélange. 49es Journées de la Recherche Porcine, Paris, France, 31-1 février 2017.
 - Global solution analysis of a simple pooling problem with application in the feed industry. JOPT 2017, Montréal, Canada, 8-10 mai 2017.
 - Some Convergence Properties of Regularization and Penalization Schemes for MPCCs. SIAM OP17, Vancouver, Canada, 22-25 mai 2017.
 - Modeling and Optimization of New Feeding System in the Pig Industry : Linear and Bilinear Problems. SIAM OP17, Vancouver, Canada, 22-25 mai 2017.
 - Modeling of a new hybrid feeding system in pig industry. IFORS 2017, Québec, Canada, 17-21 juillet 2017.
 - Modeling and optimization of growing-finishing pigs diet. EDP-Normandie 2017, Caen, France, 25-26 octobre 2017.
 - Global convergence analysis of a bilinear model with application in the feed industry. OMS 2017, La Havane, Cuba, 16-20 décembre 2017.
- Exposés et articles de vulgarisation scientifique :
 - New diet formulation method : Minimization of costs and excretion in pigs industry. MMS 2016 : Measurement, Modeling & Simulation, Rennes, France, 28 avril 2016.
 - Nouvelle méthode de formulation : réduction des coûts et des rejets. Tech Porc, juillet-août 2016.

- The math behind... Feeding pigs. Math Matters, Apply it ! février 2017.
- Les maths pour nourrir les animaux. Kaféfak, Sherbrooke, Canada, 8 mars 2017.
- Saving costs and the environment by mixing pig diets. PigProgress, 10 février 2017.
- Low-cost diets with low excretion levels - it is possible. PigProgress, 28 juin 2017.

La présentation à "MMS 2016 : Measurement, Modeling & Simulation" m'a permis de remporter le prix de vulgarisation décerné par les partenaires industriels.

Pour finir, cette thèse a permis une collaboration avec Léonie Dusart, responsable alimentation des volailles et durabilité des systèmes, chez ITAVI. Elle souhaite mettre en place les alimentations que j'ai développées lors de ma maîtrise ainsi que celles présentées dans cette thèse dans le milieu avicole.

Annexe A

Optimisation des Coûts d’Alimentation et des Rejets chez le Porc Charcutier

Cet article est paru dans le proceeding des 48^e Journées de la Recherche Porcine qui ont eu lieu à Paris les 3 et 4 février 2016.

Optimisation des coûts d'alimentation et des rejets chez le porc charcutier

Émilie JOANNOPOULOS (1,2), François DUBEAU (1), Jean-Pierre DUSSAULT (3), Mounir HADDOU (2), Candido POMAR(4)

Optimization of feeding costs and excretions during growing-finishing pig operations

The aim of this study is to find a formulation method to reduce both the total feed cost and the nitrogen (N) and phosphorus (P) excretions. We will compare two new formulation methods, applied to a precision-feeding system using two feeds, with the traditional three phase (25-50, 50-90, 90-130 kg of body weight) feeding system using complete feeds. In the latter one, simulated pigs are fed using complete feeds formulated at fixed energy density (10.36 MJ EN / kg), while in the two former ones, they are fed according to a precision-feeding system (daily phases) using two feeds without predetermined energy density, which, when mixed into several proportions, satisfy the requirements for each day. Without trying to reduce N and P excretions, the precision-feeding system reduced the feed cost by 4.1%, while the amount of N and P excretions were reduced by 14.8% and 3.3% respectively. When the excretions are forced below some levels, many possibilities are available to reduce the P and N excreted without increasing the feed cost. One of them can reduce N by 22.4% and P by 11.1%. Other alternatives could be good trade-offs between low excretion level and low cost.

INTRODUCTION

Le coût de l'alimentation représente plus de 70% du coût total de production du porc charcutier et une gestion optimale de la composition des aliments en accord avec le programme alimentaire aura un impact majeur sur la rentabilité des exploitations (Morel *et al.*, 2012). Les conséquences environnementales de la production porcine sont également très importantes, il est donc essentiel de les diminuer. L'effet de différentes stratégies alimentaires sur le coût des aliments et leur impact environnemental a été étudié récemment (Brossard *et al.*, 2010 ; Dubeau *et al.*, 2011 ; Pomar *et al.*, 2014). Le but de ce travail est de proposer une nouvelle méthode de formulation des aliments destinés aux porcs charcutiers permettant de réduire à la fois les coûts d'alimentation et les rejets de phosphore (P) et d'azote (N).

1. MATÉRIEL ET MÉTHODES

La simulation faite dans cette étude a été réalisée pour un animal moyen. Au lieu de minimiser uniquement le coût unitaire de l'aliment (\$/kg), nous avons cherché à minimiser le coût total de l'alimentation (\$/porc) tout en réduisant les rejets de P et N. Nous avons comparé le coût de l'alimentation et les rejets de N et de P pour toute la période de croissance d'un porc nourri selon une alimentation à phases quotidiennes utilisant deux prémélanges uniques, déterminés lors de l'optimisation, en début de croissance, et pouvant avoir chacun une concentration énergétique différente (nouvelle méthode, NM),

à une alimentation conventionnelle à trois phases (25-50, 50-90 et 90-130 kg de poids vif) utilisant trois aliments complets (un aliment par phase) dont la densité énergétique a été fixée à 10,36 MJ d'énergie nette (méthode de référence, MR). On suppose dans tous les cas que les porcs consomment suffisamment pour satisfaire leur besoin en énergie nette et que la capacité d'ingestion augmente avec l'âge (Black *et al.*, 1986). Pour une alimentation suivant la méthode de référence MR, les aliments ont été déterminés de manière à ce que chacun d'eux satisfasse les besoins en nutriment (NRC, 1998) de la phase à laquelle il est associé. Pour une alimentation suivant la nouvelle méthode NM, les deux prémélanges ont été déterminés de façon à ce que leur combinaison quotidienne satisfasse ou dépasse les besoins journaliers. Ces deux prémélanges pris séparément ne satisfont pas nécessairement les besoins des animaux à des poids particuliers, mais leur mélange à des proportions spécifiques le permet tout au long de la période de croissance. De plus, cette combinaison est obtenue en minimisant le coût de l'alimentation (\$/porc). Seulement le ratio entre un nutriment (ex. lysine) et l'énergie peut être contrôlé avec deux prémélanges. Le ratio entre les autres nutriments et la lysine peut cependant varier de façon proportionnelle au cours de la croissance.

Tous les aliments utilisés dans cette étude ont été obtenus à partir de la liste d'ingrédients disponibles et de leur prix moyen pour l'ensemble de la période allant de novembre 2010 à octobre 2011 (Aliments Bretons Inc, QC, Canada). Les coûts fixes tels que celui de la fabrication de l'aliment, de l'entreposage, du transport et de la distribution ne sont pas considérés dans cette étude.

Les performances d'un porc type sont considérées ici et il a été simulé à l'aide d'un modèle mathématique déterministe (NRC, 1998). La méthode de formulation utilisée dans cette étude permet de déterminer simultanément la composition des deux prémélanges et les proportions quotidiennes de manière à minimiser le coût total de l'alimentation (Joannopoulos *et al.*, 2015), tout en rajoutant des contraintes sur les rejets de P et de N. Des modèles linéaires monocritères ont été utilisés pour les aliments MR. Deux types de modélisation ont été utilisés pour la nouvelle méthode NM. La première consiste à minimiser seulement le coût de l'alimentation avec un modèle bilinéaire monocritère (NM-MC). La seconde consiste à rajouter les contraintes sur les rejets de P et de N utilisant un modèle bilinéaire tricitére (NM-TC). Toutes ces modélisations ont été réalisées en langage AMPL (Fourer *et al.*, 2002) et l'optimisation a été faite à partir de serveur NEOS (Czyzyk *et al.*, 1998 ; Dolan, 2001).

2. RESULTATS ET DISCUSSION

Tableau 1 – Coût de l'alimentation et rejets de phosphore et d'azote selon les différentes méthodes de formulation (entre parenthèses, écart en pourcentage avec la méthode de référence)

Méthode ¹	Coût de l'alimentation \$/porc	P excrété kg/porc	N excrété kg/porc
MR	100,33	1,203	4,062
NM-MC	96,232 (-4,1%)	1,163 (-3,3%)	3,463 (-14,8%)
NM-TC	100,31 (-0,02%)	1,070 (-11,1%)	3,151 (-22,4%)

¹MR : méthode de référence ; NM-MC : nouvelle méthode avec modèle bilinéaire monocritère ; NM_TC : nouvelle méthode avec modèle bilinéaire tricitére.

L'alimentation avec un aliment complet pour chacune des trois phases (méthode MR) est utilisée comme référence dans cette étude (Tableau 1). Lorsqu'on utilise une alimentation à phases quotidiennes avec prémélanges non nécessairement complets et sans contraintes environnementales (méthode NM-MC), le coût de l'alimentation est réduit de 4,1% ; les rejets de P et de N sont réduits de respectivement 3,3 et 14,8%.

Les simulations suivantes ont consisté à forcer les rejets à être réduits de 3% à 23% pour le P, et de 15% à 30% pour le N, par pas de 1%, tout en utilisant une alimentation journalière avec des prémélanges à concentration énergétique libre (Figure 1 ; méthode NM-TC). La courbe A présentée sur la surface de la figure 1 correspond aux paires de réductions des rejets de P et de N avec un coût de l'alimentation égal à celui de MR. Toutes les paires situées sous cette courbe et jusqu'à un rejet de P = 0% et un rejet de N = 0%, sont des situations permettant de réduire à la fois les rejets et le coût de l'alimentation. La méthode proposée permet de quantifier le coût des réductions des rejets en N et P, en fonction de l'intensité de cette réduction.

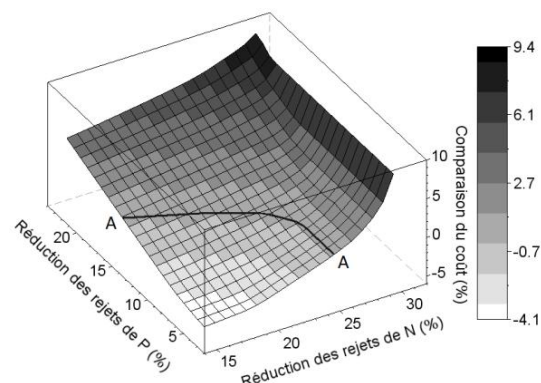


Figure 1 – Évolution du coût de l'alimentation NM-TC (nouvelle méthode, modèle bilinéaire tricitére) par rapport à MR (méthode de référence) en fonction des rejets de phosphore et d'azote

Le scénario NM-TC permet des diminutions de 11% de l'excrétion de P et de 22% de l'excrétion N tout en maintenant un coût de l'alimentation semblable à celui de la méthode traditionnelle (MR).

CONCLUSION

Une alimentation en phases quotidiennes utilisant deux prémélanges à concentration énergétique libre permet de réduire considérablement le coût total de l'alimentation. De plus, ces aliments permettent de réduire légèrement les rejets de P et, de manière plus importante, ceux de N. Toujours en utilisant une alimentation à phases quotidiennes, il est possible de réduire davantage les rejets, mais le gain monétaire est alors moins important.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Black J.L., Campbell R.G., Williams I.H., James K.J., Davies G.T., 1986. Simulation of energy and amino acid utilisation in the pig. *Res. Dev. Agric.*, 3, 121-145
- Brossard L., Quiniou N., Dourmad J.Y., Salaün Y., Van Milgen J., 2010. Définir des stratégies alimentaires alliant performance économique et impact environnemental grâce à la modélisation du groupe de porcs en croissance. *Journées Rech. Porcine*, 42, 131-132.
- Czyzyk J., Mesnier M.P., More J.J., 1998. NEOS server. *IEEE Comput. Sci. Eng.*, 5, 68-75.
- Dolan E., 2001. The Neos server 4.0 administrative guide. Technical Memorandum ANL/MCS-TM-250. Eds, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory.
- Dubeau F., Julien P.-O., Pomar C., 2011. Formulating diets for growing pigs: economic and environmental considerations. *Ann. Oper. Res.*, 190, 239-269.
- Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W., 2002. AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. Col Publishing Company.
- Joannopoulos É., Dubeau F., Dussault J.-P., Pomar C., 2015. Diet problems. In : Plà-Aragónés L. M. (Ed), *Handbook of Operations Research in Agriculture and the Agri-Food Industry*, 397-417. Springer-Verlag, New York.
- Morel P.C.H., Sirisatien D., Wood G.R., 2012. Effect of pig type, costs and prices, and dietary restraints on dietary nutrient specification for maximum profitability in grower-finisher pig herds: A theoretical approach. *Livest. Sci.*, 148, 255-267.
- NRC, 1998. Nutrient Requirements of Swine. 10th ed., National Academy Press, Washington, DC, 189p.
- Pomar C., Pomar J., Dubeau F., Joannopoulos É., Dussault J.-P., 2014. The impact of daily multiphase feeding on animal performance, body composition, nitrogen and phosphorus excretions, and feed costs in growing-finishing pigs. *Anim. Sci.*, 8, 704-713.

Annexe B

Nouvelle méthode d'alimentation hybride : un mixte de l'alimentation traditionnelle par phases et par mélanges

Cet article est paru dans le proceeding des 49^e Journées de la Recherche Porcine qui ont eu lieu à Paris les 31 janvier et 1^e février 2017.

Nouvelle méthode d'alimentation hybride : un mixte de l'alimentation traditionnelle par phases et par mélange

Emilie JOANNOPOULOS (1,2), François DUBEAU (1), Mounir HADDOU (2), Jean-Pierre DUSSAULT (1), Candido POMAR (3)

Nouvelle méthode d'alimentation hybride : un mixte de l'alimentation traditionnelle et par mélange

L'alimentation représente une part importante du coût de production en engraissement porcin et, dans le contexte économique actuel, il est important de parvenir à le réduire. Nous proposons ici une méthode d'alimentation se basant à la fois sur une alimentation traditionnelle par phases et sur une alimentation avec prémélanges (utilisant deux prémélanges et à une phase). Le principe est le suivant : pour chaque phase, nous utilisons une alimentation à deux prémélanges (optimisés en même temps que le coût total et non nécessairement complets) qui sont combinés afin de satisfaire les besoins des animaux quotidiennement. Par exemple, pour trois phases, nous utilisons quatre prémélanges (A, B, C et D) : A et B sont utilisés dans la première phase, B et C sont utilisés dans la seconde phase et finalement C et D sont utilisés dans la dernière phase. Par rapport à la méthode conventionnelle, une telle approche permet de réduire le coût total de 5,2% tout en diminuant les rejets d'azote et de phosphore, respectivement, de 17,8% et 2,2%. En ajoutant comme critère la minimisation des rejets, nous pouvons proposer une méthode d'alimentation ayant un coût équivalent à la méthode traditionnelle à trois phases et qui réduit les rejets d'azote de 18% et de phosphore de 16%. De même, à coût équivalent à une méthode d'alimentation de précision (utilisant deux prémélanges et une phase), nous pouvons réduire les rejets d'azote de 17% et ceux de phosphore de 8%.

New hybrid feeding system: a mix between traditional feeding system and feeding system using feeds

Feed represents an important part of the production cost in the growing-finishing pig industry and, in the current economic context, it is important to reduce it. In this paper, we propose a new feeding system based on a traditional feeding system with phases and a feeding system using feeds (with one phase and two feeds). The concept is the following: for each phase, one is a feeding system using two feeds (optimized at the same time as the total cost minimization and not necessarily complete) which will be blended together to satisfy the daily animal requirements. For example, for three phases, one will use four feeds (A, B, C, and D): A and B will be used in the first phase, B and C in the second phase and finally C and D in the last phase. Compared to the traditional feeding system, this leads to a feed cost reduction of 5.2% while nitrogen and phosphorus excretion decreases by 17.8% and 2.2%, respectively. If minimization of excretions is added to feed cost as a criterion, one can propose a feeding system which is cost equivalent to the traditional feeding system with three phases and reducing phosphorus and nitrogen excretion, for example by 16% and 18%, respectively. Moreover, one can propose feeding systems which are cost equivalent to a precision feeding system (using two feeds and one phase), and which reduce phosphorus and nitrogen excretions by 8% and 17%, respectively.

INTRODUCTION

L'alimentation représente presque les trois quarts du coût de production dans un élevage de porcs en croissance-finition et, dans le contexte économique actuel difficile, il est primordial de réduire les coûts d'élevage autant que possible. De plus, l'élevage porcin est fréquemment cité comme étant source de pollution par l'apport massif de phosphates et de nitrates lors de l'épandage de lisier. Il est donc également très important de réduire ces rejets.

Plusieurs études ont déjà été réalisées (Brossard *et al.*, 2010 ; Dubeau *et al.*, 2011 ; Pomar *et al.*, 2014 ; Joannopoulos *et al.*, 2015) afin d'évaluer l'impact économique et environnemental de différentes stratégies d'alimentation.

Le porc charcutier est généralement nourri selon des plans d'alimentation par phases caractérisées par l'utilisation d'un aliment complet unique à densité énergétique fixée (par exemple 10,36 MJ d'énergie nette/kg). Depuis quelques années de nouvelles méthodes d'alimentation basées sur l'utilisation de deux aliments combinés, en différentes proportions quotidiennement, ont fait leur apparition dans des études théoriques (Joannopoulos, 2012).

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode d'alimentation que nous appelons hybride et qui combine l'alimentation par phases et par mélange. Une étude monocritère (MC), c'est-à-dire ne minimisant que le coût de l'alimentation, et une étude tricitéère (TC), qui permet de réduire simultanément le coût d'alimentation et les rejets de phosphore (P) et d'azote (N), ont été réalisées.

1. MATERIEL ET METHODES

Afin de faciliter la lecture, les formules mathématiques décrivant les différentes méthodes de formulation sont détaillées dans la section 4, située en annexe, de cet article. Nous y faisons référence lors de la description des différents systèmes d'alimentation étudiés.

1.1. Données utilisées

Dans cet article, nous considérons un porc moyen, représentatif d'une population, élevé de 20 kg à 130 kg de poids vif, avec un gain moyen quotidien de 1 kg/jour. Il consomme 2864 MJ d'énergie nette pour toute la période de croissance, soit une consommation moyenne quotidienne de 25,80 MJ/jour. De futurs travaux seront consacrés à l'étude d'un troupeau.

Les besoins de l'animal incluent les besoins énergétiques et en nutriments (lysine, arginine, calcium, phosphore, etc.). La modélisation mathématique de ces contraintes peut être retrouvée à la section 4.2. Nous supposons que l'animal consomme un aliment jusqu'à satisfaire son besoin en énergie, mais que cette consommation peut être limitée par sa capacité d'ingestion (Black *et al.*, 1986).

Les ingrédients utilisés dans cette étude étaient disponibles de novembre 2010 à octobre 2011 et nous utilisons le prix moyen (en \$CAD) de chaque ingrédient sur cette période (Aliments Bretons inc., QC, Canada). Les aliments doivent satisfaire certaines caractéristiques (par exemple, ne pas contenir plus de 60% de maïs). La formule correspondant à cette contrainte est décrite dans la section 4.2 de cet article.

Les coûts auxiliaires, tels les coûts de fabrication, de transport, de stockage et de distribution ne sont pas considérés dans cette étude. En effet, ces frais varient, entre autres, en fonction de la

taille et de l'organisation du fabricant d'aliments, de la taille de l'exploitation, et de la distance que les aliments doivent parcourir, ils sont peu influencés par les programmes alimentaires proposés dans cette étude.

1.2. Systèmes d'alimentation

Le plan d'alimentation utilisé comme méthode de référence (MR) consiste à nourrir les porcs en trois phases (20-50 kg, 50-90 kg et 90-130 kg de poids vif). Lors de chaque phase, l'animal est nourri en utilisant un unique aliment complet dont la concentration énergétique est fixée à 10,36 MJ d'énergie nette/kg. Ayant supposé que les animaux se nourrissent jusqu'à satisfaire leur besoin en énergie, nous pouvons calculer la quantité d'aliments ingérée quotidiennement. Ainsi, les seules variables à déterminer sont les proportions de chaque ingrédient qui compose l'aliment. Chaque aliment doit satisfaire les besoins pour chaque jour de la phase à laquelle il est associé. Dans cette méthode, c'est le coût unitaire qui est minimisé (\$CAD/kg). Le problème résolu est linéaire et son modèle (MR) est décrit dans la section 4.3.1.

La nouvelle méthode que nous proposons ici est un système d'alimentation hybride se basant à la fois sur une alimentation par phases et par la combinaison de deux prémélanges qui sont des aliments non nécessairement complets. Le principe est le suivant :

- la période de croissance des animaux est décomposée en p phases,
- $p+1$ prémélanges sont utilisés,
- lors de chaque phase, seulement deux prémélanges sont utilisés,
- ces deux prémélanges sont combinés en différentes proportions quotidiennement afin de satisfaire les besoins des animaux à chaque jour de la phase,
- deux phases consécutives n'ont qu'un seul prémélange en commun.

Ainsi, pour $p = 3$, nous utilisons quatre prémélanges de la manière suivante :

- les mélanges 1 et 2 sont utilisés lors de la première phase,
- les mélanges 2 et 3 sont utilisés lors de la seconde phase,
- les mélanges 3 et 4 sont utilisés lors de la troisième phase.

Cette méthode est notée MHp , p correspondant au nombre de phases considérées, et utilise $p+1$ prémélanges. Par exemple, une alimentation en trois phases où l'on utilisera quatre prémélanges, est notée $MH3$. Nous avons étudié deux variantes de ce modèle. Dans le cas de l'optimisation monocritère, c'est-à-dire lorsqu'on minimise uniquement le coût d'alimentation, le modèle est noté MHp -MC, et dans le cas de l'optimisation tricitéère, c'est-à-dire lorsque les rejets sont minimisés en plus du coût, le modèle est noté MHp -TC. Nous avons choisi cette méthode car elle est facile à mettre en place en pratique dans les élevages du fait qu'il n'y a jamais plus de deux prémélanges utilisés simultanément. Dans ces simulations, nous avons optimisé le coût total d'alimentation (\$CAD/porc) pour toute la période de croissance. Les prémélanges que nous proposons d'utiliser dans cette méthode sont déterminés lors de la résolution du problème minimisant le coût total de l'alimentation. Ainsi, chaque prémélange pris indépendamment n'est pas nécessairement complet pour une certaine journée,

mais une fois combinés en différentes proportions quotidiennement, l'aliment issu de cette combinaison l'est, satisfaisant ainsi les besoins des animaux au long de leur croissance. De plus, contrairement à la méthode MR, la densité énergétique de chaque prémélange n'est pas fixée à l'avance et les prémélanges n'ont donc pas forcément tous la même densité énergétique. Ceci implique que la quantité ingérée est inconnue lors de la détermination des aliments et le modèle représentant cette alimentation est un problème bilinéaire. Le modèle (MH3-MC), décrit dans la section 4.3.2, est un exemple pour $p = 3$ de la version monocritère. Pour obtenir le modèle de l'alimentation tricitére MH3-TC, il suffit d'ajouter au modèle MH3-MC les contraintes (TC), décrites dans la section 4.3.3. Dans le cas du modèle tricitére, nous avons procédé avec un balayage des valeurs admissibles de P et de N rejetés, par décrets de 1%, en partant des rejets du modèle MR.

Enfin, la méthode d'alimentation optimale (MO) consiste à nourrir les animaux en utilisant un aliment complet à coût minimal chaque jour. La densité énergétique de ces aliments n'est pas fixe et peut varier d'un jour à l'autre. Le problème correspondant à cette alimentation peut être résolu grâce à un problème linéaire par jour, dont le modèle est présenté en section 4.3.4. Cette alimentation n'est pas réalisable dans la pratique à cause du grand nombre d'aliments à utiliser (un aliment par jour). Cependant, le coût de cette alimentation est un optimum que nous cherchons à atteindre.

1.3. Logiciels

Tous les modèles présentés dans cet article ont été modélisés en langage AMPL (Fourer *et al.*, 2002). Pour les résoudre, nous avons utilisé le solveur d'optimisation Ipopt (Wächter et Biegler, 2005) qui utilise un algorithme de points intérieurs.

2. RESULTATS ET DISCUSSION

En utilisant les données que nous avons décrites à la section 1.1, une alimentation de type MR a un coût de 100,33 \$CAD (Tableau 1).

L'alimentation par mélange telle qu'elle est connue actuellement, c'est-à-dire à phase quotidienne et utilisant deux prémélanges combinés en différentes proportions, correspond au modèle MH1-MC et a un coût de 96,23 \$CAD, soit une diminution de 4,1%, et une réduction des rejets de P et de N respectivement de 3,3% et 14,8%.

La méthode MO permet de nourrir un porc pour 94,84 \$CAD et est un idéal que nous essayons d'atteindre.

2.1. Optimisation monocritère

Augmenter le nombre de phases en ne cherchant à minimiser que le coût d'alimentation permet de réduire davantage ce coût qui diminue de 5,0%, 5,19% et 5,21%, respectivement pour des alimentations de type monocritère MH2, MH3 et MH4, par rapport à l'alimentation de type MR. Les rejets de P sont réduits entre 1,0 et 3,3%, pendant que ceux de N sont réduits entre 14,8 et 18,2% (Tableau 1).

À la vue de ces résultats, il n'est pas nécessaire d'augmenter considérablement le nombre de phases. En effet, on peut constater que le coût de l'alimentation diminue très

rapidement lorsqu'une alimentation par mélange est mise en place (-4,1% avec une alimentation MH1), puis le coût est réduit encore de 1% avec deux phases et trois prémélanges (MH2) puis 0,2% supplémentaire pour le passage à trois phases et quatre prémélanges (MH3). En revanche, passer de trois à quatre phases (MH4) ne permet qu'une économie de 0,02%. Sachant que nous ne pourrions pas diminuer le coût de l'alimentation de plus de 5,47% au total, ce qui correspond à une alimentation où l'on utilise un mélange complet différent chaque jour, soit seulement 0,27% supplémentaire, nous ne sommes pas allés plus loin dans les calculs.

Tableau 1 – Coût (\$CAD/porc) et rejets (kg/porc) des différentes méthodes d'alimentation avec une optimisation monocritère

Méthode ¹	Coût	P excrété	N excrété
MR	100,33	1,203	4,062
MH1-MC	96,23 (-4,0%)	1,163 (-3,3%)	3,463 (-14,8%)
MH2-MC	95,29 (-5,0%)	1,191 (-1,0%)	3,347 (-17,6%)
MH3-MC	95,12 (-5,19%)	1,177 (-2,2%)	3,339 (-17,8%)
MH4-MC	95,10 (-5,21%)	1,170 (-2,7%)	3,324 (-18,2%)
MO	94,84 (-5,5%)	1,172 (-2,7%)	3,293 (-18,9%)

¹ MR : méthode de référence ; MHp-MC : méthode hybride à p phases ; MO : méthode optimale.

2.2. Optimisation tricitére

Nous nous sommes concentrés sur une alimentation de type MH3 lors de la résolution du modèle tricitére, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à déterminer une alimentation minimisant le coût et les rejets de P et de N.

Il est connu que, lorsqu'on essaye de réduire les rejets de P et de N, le coût de l'alimentation augmente. Cependant, nous venons d'énoncer une nouvelle méthode d'alimentation permettant de réduire considérablement le coût de l'alimentation lorsque les rejets ne sont pas pris en compte. Nous avons donc étudié l'impact économique de cette méthode d'alimentation lorsque nous minimisons également les rejets de P et de N.

Pour cela, nous avons forcé les rejets de P à être inférieurs de 0% à 25%, et ceux de N à être inférieurs de 0% à 30%, aux rejets d'une alimentation de type MR, par pas de 1%.

Les résultats de cette simulation montrent que les rejets de N et de P peuvent être considérablement réduits, par rapport à une alimentation de type MR, sans augmentation du coût de l'alimentation. La courbe A (Figure 1) décrit la ligne de niveau d'un coût équivalent à la méthode MR sur la surface représentant le coût de l'alimentation MH3-TC. Tous les couples de valeurs de rejet P et de rejet N (R_P, R_N) situés sous cette courbe (par exemple, point D) ont été obtenus avec quatre prémélanges dont le coût d'alimentation est inférieur à celui obtenu avec la méthode MR. Le point C (Figure 1 et Tableau 2) correspond à une alimentation de type MH3-TC permettant de nourrir les animaux à un coût de 100,33 \$CAD tout en ayant des rejets de P et de N, respectivement, de 0,986 kg et 3,412 kg, soit une réduction de 18% et 16%. Le point D, quant à lui, correspond à une alimentation de type MH3-TC permettant de nourrir chaque animal à un coût de 98,22 \$CAD, soit une réduction de 2,10%, et des rejets de P et de N de 1,034 kg et 3,493 kg, soit une réduction de 14% chacun.

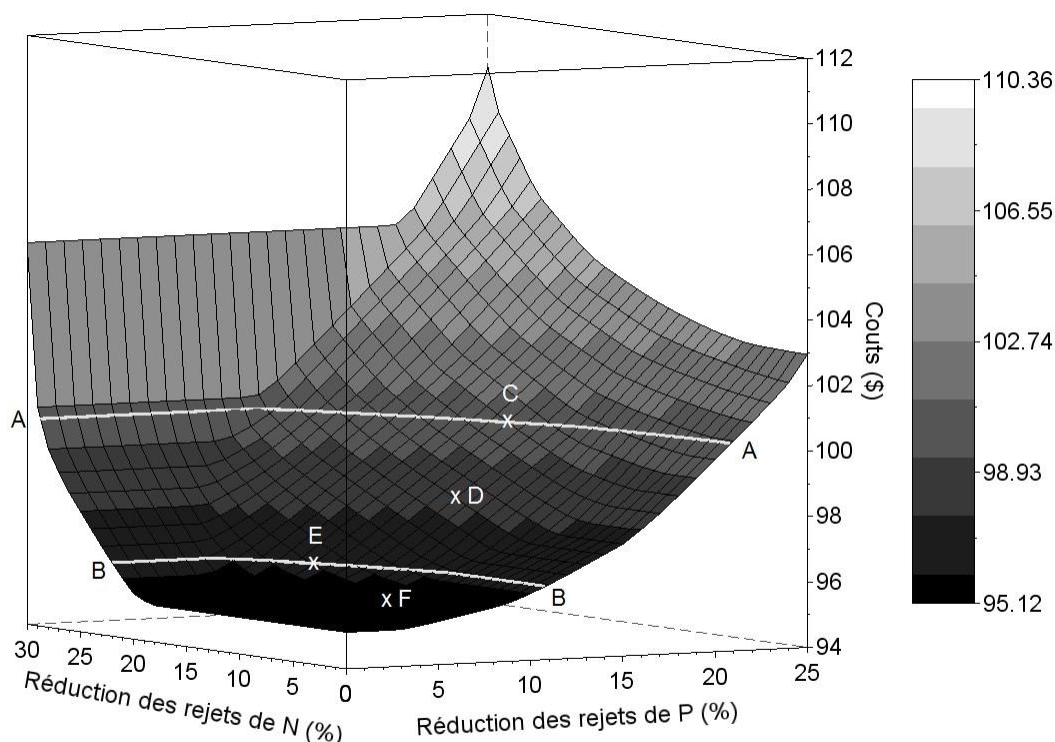


Figure 1 – Coût de l'alimentation (\$CAD/porc) MH3-TC en fonction de la réduction des rejets (%) de P et de N par rapport aux excréments de la méthode de référence

Tableau 2 – Exemples de combinaison (coût, rejets P, rejets N) des différentes méthodes d'alimentation obtenus avec la méthode d'optimisation tricritère

Point ¹	Méthode ²	Coût ³ , \$CAD/porc	P excrété ³ , kg/porc	N excrété ³ , kg/porc
n/a	MR	100,33	1,203	4,062
n/a	MH1-MC	96,23 (-4,1%)	1,163 (-3,3%)	3,463 (-14,8%)
C	MH3-TC	100,33 (-0%)	0,986 (-18%)	3,412 (-16%)
D	MH3-TC	98,22 (-2,10%)	1,034 (-14%)	3,493 (-14%)
E	MH3-TC	96,21 (-4,10%)	1,107 (-8%)	3,371 (-17%)
F	MH3-TC	95,66 (-4,65%)	1,107 (-8%)	3,656 (-10%)
n/a	MO	94,84 (-5,47%)	1,172 (-2,7%)	3,293 (-18,9%)

¹Points correspondant sur la Figure 1. n/a : ne correspond à aucun point.

²MR : méthode de référence ; MHp-MC : méthode hybride monocritère à p phases ; MHp-TC : méthode hybride tricritère à p phases ; MO méthode optimale.

³Entre parenthèses, réductions par rapport à la méthode MR en %.

La courbe B représente la ligne de niveau du coût d'une alimentation de type MH1-MC, qui correspond à l'alimentation par mélanges telle qu'elle est connue aujourd'hui. On peut y faire la même interprétation que pour la courbe A. Ainsi, le point E correspond à une alimentation de type MH3-TC ayant un coût de 96,21 \$CAD, équivalent à celui de la méthode MH1-MC, et des rejets de P et de N de, respectivement, 1,107 kg et

3,371 kg, soit une réduction de 8% et 17% par rapport à la méthode MR. Le point F correspond à une alimentation de type MH3-TC ayant un coût de 95,66 \$CAD, soit une réduction de 4,65%, et des rejets de P et de N de, respectivement, 1,107 kg et 3,656 kg, soit une réduction de 8% et 10% par rapport à la méthode MR.

Ces points ne sont que des exemples et on peut bien entendu en choisir d'autres en fonction du besoin de chacun. En effet, si un producteur préfère réduire grandement les rejets de N et très peu ceux de P, il est possible de trouver une solution le permettant. Il est toutefois possible de trouver un compromis entre réduction du coût d'alimentation et diminution des rejets afin de réduire le coût de production d'un élevage de porc, tout en préservant l'environnement.

CONCLUSION

L'utilisation de prémélanges (c'est-à-dire d'aliments non nécessairement complets) combinés quotidiennement en différentes proportions permet de réduire les coûts d'alimentation. Cependant, il est possible de réduire davantage ce coût en utilisant la méthode hybride développée qui combine l'alimentation par mélanges et par phases. Cette réduction pourrait être de 5,2% avec une alimentation hybride à trois phases et quatre prémélanges. Cette alimentation permet également de réduire légèrement les rejets de P (2,2%) et de manière plus importante ceux de N (17,8%). Il est possible de réduire davantage les rejets de N et de P en utilisant un modèle d'optimisation tricritère ainsi que de trouver un compromis entre la réduction des rejets et le coût de l'alimentation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Black J.L., Campbell R.G., Williams I.H., James K.J., Davies G.T., 1986. Simulation of energy and amino acid utilisation in the pig. Res. Dev. Agric., 3, 121-145.
- Brossard L., Quiniou N., Dourmad J.-Y., Salaün Y., Van Milgen J., 2010. Définir des stratégies alimentaires alliant performance économique et impact environnemental grâce à la modélisation du groupe de porcs en croissance. Journées Rech. Porcine, 42, 131-132.
- Dubeau F., Julien P.-O., Pomar C., 2011. Formulating diets for growing pigs: economic and environmental considerations. Ann. Oper. Res., 190, 239-269.
- Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W., 2002. AMPL: A modeling language for mathematical programming. Col Publishing Company 571 p.
- Joannopoulos E., 2012. Nouvelles approches de modélisation et d'optimisation de diète animale. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada, 88 p.
- Joannopoulos E., Dubeau F., Dussault J.-P., Pomar C., 2015. Diet problems. In: Plà-Aragónés L.M. (Ed), Handbook of operations research in agriculture and the agri-food industry, 397-417. Springer-Verlag, New York.
- Pomar C., Pomar J., Dubeau F., Joannopoulos É., Dussault J.-P., 2014. The impact of daily multiphase feeding on animal performance, body composition, nitrogen and phosphorus excretions, and feed costs in growing-finishing pigs. Anim. Sci., 8:5, 704-713.
- Wächter A., Biegler L.T., 2005. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Math. Prog., 106, 25-57.

ANNEXE - MODELISATION MATHÉMATIQUE

Notations

Les notations utilisées sont les suivantes :

- p : le nombre de phases,
- I : l'ensemble des ingrédients,
- J : l'ensemble des jours de la période de croissance, séparé en p sous-ensembles J_j représentant l'ensemble des jours de la phase j ,
- N : l'ensemble des nutriments (ex : énergie, lysine, thréonine, calcium...) qui sont considérés,
- A : l'ensemble des prémélanges,
- M : la matrice d'apport en nutriment de chaque ingrédient, où m_n est le vecteur de l'apport en nutriment n de chaque ingrédient,
- b_n : le vecteur de besoin du porc en nutriment n ,
- B_n : le vecteur de l'apport maximal autorisé en nutriment n ,
- W^{max} : le vecteur représentant la capacité d'ingestion du porc,
- x^{max} : le vecteur du taux maximal d'incorporation des ingrédients dans les prémélanges,
- c : le vecteur prix des ingrédients,
- X : la matrice des aliments, où la colonne x_a , $a \in A$, représente la composition du prémélange,
- Q : la matrice des quantités, où la colonne q_a , $a \in A$, contient les quantités q_{ja} de prémélange a donné chaque jour j de l'étude.

Avec ces notations, l'aliment qui est donné à l'animal le jour j , quel que soit le système d'alimentation considéré, est représenté par l'expression $\sum_{a \in A} q_{ja} x_a$.

Usuellement, les vecteurs sont donnés en colonnes. Ainsi, si v est un vecteur, la notation « v transposé » sera notée v^t .

Modélisation des contraintes

Pour que l'animal ait une croissance normale, nous devons satisfaire ses besoins à chaque jour j . Ainsi, nous avons trois types de contraintes :

- la contrainte sur l'énergie, modélisée par l'équation $m_E^t (\sum_{a \in A} q_{ja} x_a) = b_{Ej}$,
- les contraintes sur les nutriments, modélisées par

l'équation $b_{nj} \leq m_n^t (\sum_{a \in A} q_{ja} x_a) \leq B_{nj}$, pour tout $n \in N \setminus \{E\}$,

- la contrainte sur la capacité d'ingestion, modélisée par l'équation $\sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{max}$, pour tout $j \in J$.

De plus, les prémélanges et quantités doivent satisfaire à certaines caractéristiques que nous pouvons modéliser grâce à trois types de contraintes :

- les quantités non-négatives sont modélisées par l'équation $q_{.a} \geq 0$, pour tout $a \in A$,
- la contrainte de proportion sur les ingrédients est modélisée par l'équation $\sum_{i \in I} x_{ia} = 1$, pour tout $a \in A$,
- les contraintes d'incorporation de chaque ingrédient sont modélisées par l'équation $0 \leq x_{.a} \leq x^{max}$ pour tout $a \in A$.

Par simplicité, nous appellerons S_j l'ensemble regroupant toutes les contraintes du jour j . Ainsi, $q_{ja} x_a \in S_j$ signifie que prémélange représenté par $q_{ja} x_a$ est réalisable (satisfait les contraintes) pour le jour j .

Modélisation des méthodes d'alimentation

L'alimentation MR

Une alimentation MR est modélisée

$$(MR) \begin{cases} \min_x \sum_{j \in J} c^t (q_{j1} x_{.1} + q_{j2} x_{.2} + q_{j3} x_{.3}), \\ \text{sujet à} \begin{cases} q_{j1} x_{.1} \in S_j & \forall j \in J_1, \\ q_{j2} x_{.2} \in S_j & \forall j \in J_2, \\ q_{j3} x_{.3} \in S_j & \forall j \in J_3. \end{cases} \end{cases}$$

Ce type de modèle est un modèle linéaire (fonction objectif linéaire et contraintes linéaires) et lors de sa résolution, nous sommes assurés d'obtenir un minimum global.

L'alimentation MHP-MC

Une alimentation MH3-MC se modélise :

$$(MH3 - MC) \begin{cases} \min_{X,Q} \sum_{j \in J} c^t (q_{j1} x_{.1} + q_{j2} x_{.2} + q_{j3} x_{.3} + q_{j4} x_{.4}), \\ \text{sujet à} \begin{cases} q_{j1} x_{.1} + q_{j2} x_{.2} \in S_j & \forall j \in J_1, \\ q_{j2} x_{.2} + q_{j3} x_{.3} \in S_j & \forall j \in J_2, \\ q_{j3} x_{.3} + q_{j4} x_{.4} \in S_j & \forall j \in J_3, \\ q_{j1} = 0 & \forall j \in J_2 \cup J_3, \\ q_{j2} = 0 & \forall j \in J_3, \\ q_{j3} = 0 & \forall j \in J_1, \\ q_{j4} = 0 & \forall j \in J_1 \cup J_2. \end{cases} \end{cases}$$

On remarque ici que les variables de notre modèle sont $q_{.a}$ et $x_{.a}$, pour tout $a \in A$ et que des termes bilinéaires ($q_{ja}x_{.a}$, $a \in A, j \in J$) sont présents dans la fonction objectif et dans certaines contraintes. Ce type de modèle est un modèle bilinéaire et non-convexe. Il est difficile à résoudre, et possède potentiellement plusieurs minima locaux.

L'alimentation MHP-TC

Pour obtenir une alimentation MHP-TC, nous avons utilisé la méthode ϵ -contrainte. Cette méthode permet de transformer un objectif en une contrainte majorée par une valeur maximale autorisée. Pour le modèle minimisant les rejets de P, les rejets de N et le coût de l'alimentation, nous avons transformé les objectifs modélisant les rejets en contraintes. Ainsi, pour obtenir la modélisation d'une alimentation MH3-TC, il suffit de rajouter au modèle précédent les deux contraintes

$$(TC) \begin{cases} \sum_{j \in J} M_P(q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2} + q_{j3}x_{.3} + q_{j4}x_{.4}) - P_R \leq \epsilon_P, \\ \sum_{j \in J} M_N(q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2} + q_{j3}x_{.3} + q_{j4}x_{.4}) - N_R \leq \epsilon_N, \end{cases}$$

où P_R et N_R , sont respectivement les quantités de P et de N retenues par le porc. Les variables ϵ_P et ϵ_N sont respectivement les quantités maximales de rejet de P et de N admissibles que nous avons fait varier, à la baisse et par pas de 1%, à partir des quantités de P et de N rejetés estimées par la MR.

La méthode MO

Les aliments de la méthode MO peuvent être déterminés en utilisant un modèle linéaire par jour. La modélisation diffère légèrement des modèles précédents puisque les aliments ne sont plus modélisés en proportions mais en quantités et que nous ne considérons alors plus que la variable X . Le modèle pour un jour j de cette alimentation est donnée par

$$(MO_j) \begin{cases} \min_{x_j} & c^t x_j \\ \text{sujet à.} & m_E^t x_{.j} = b_{Ej}, \\ & b_{nj} \leq m_n^t x_{.j} \leq B_{n,j} \quad \forall n \in N \setminus \{E\}, \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} \leq W_j^{max}, \\ & 0 \leq x_{.j} \leq x^{max} \left(\sum_j x_{ij} \right). \end{cases}$$

Annexe C

Une nouvelle méthode de formulation pour réduire coûts et rejets

L'article ci-après, présente les résultats des modèles de la section 4.1 de manière vulgarisé. En effet, cette revue ayant principalement un public d'éleveur porcin, ce sont les résultats qui sont important, mais la méthodologie doit tout de même rester compréhensible. Il est paru dans la revue TechPorc en juillet 2016



© CRAB

Une nouvelle méthode de formulation pour réduire coûts et rejets

De nouvelles méthodes de formulation d'aliments, combinées à l'utilisation de l'alimentation de précision, permettent de combler les besoins des porcs à l'engraissement sans trop d'excès. Ainsi, le coût de l'alimentation peut être réduit, tout comme les rejets de phosphore et d'azote.

L'élevage porcin est une activité économique importante en France, comme au Canada. Dans le contexte actuel de concurrence internationale, il est primordial de parvenir à réduire le coût de l'alimentation, qui représente plus de 70 % du coût de production. D'autre part, cette activité est souvent citée comme étant écologiquement problématique par l'apport massif de phosphates et de nitrates lors de l'épandage de lisier. En distribuant en engraissement un mélange de deux aliments, et en ajustant cette distribution à la croissance, il est possible de réduire les coûts et les rejets. Ces résultats sont issus d'une modélisation comparant un multiphase quotidien au rationnement traditionnel.

L'objectif de cette étude est d'établir une méthode qui vise à minimiser non seulement les coûts mais également les rejets. Elle a été réalisée sur un porc moyen simulé. Les ingrédients sont ceux utili-

sés par le Canada et leur prix, exprimé en dollars canadiens, est la moyenne des prix enregistrés par Aliments Breton de novembre 2011 à octobre 2012. Les aliments, déterminés grâce à des méthodes mathématiques, sont utilisés dans le cadre d'une alimentation de précision. Le but est de déterminer deux prémélanges qui, combinés en des proportions différentes chaque jour, permettent de couvrir les besoins des porcs tout au long de leur croissance. Le fait d'associer ces deux prémélanges pour un multi-phase quotidien permet de limiter les excès de certains nutriments.

Méthode de référence

- Alimentation en trois phases
- 1 aliment complet par phase
- Energie fixe à 10,36 MJ/kg
- Minimisation du coût unitaire (\$/kg)

Diminution du coût jusqu'à 4,1 %

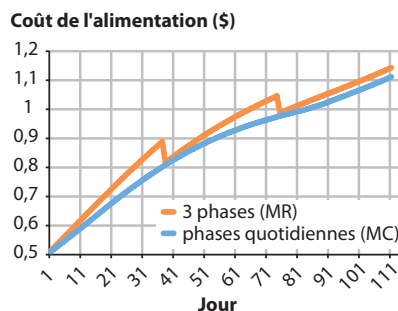
La formulation traditionnelle consiste à nourrir les animaux en trois phases en utilisant un aliment complet pour chacune d'elles. Ces aliments sont, en général, formulés à 10,36 MJ/kg d'énergie nette. La première étude qui a été conduite consiste à ne minimiser que le coût de l'alimentation. La formulation utilisée ici consiste donc à déterminer les deux prémélanges qui minimiseront le coût de l'alimentation sur toute la période de croissance. Ces prémélanges présentent deux particularités. La première est que leur densité énergétique peut être différente (par exemple un à 10,36 MJ/kg et l'autre à 9,2 MJ/kg). La seconde est qu'ils ne sont pas nécessairement complets pour un certain jour. Combinés ensemble en différentes proportions, ils satisfont

Minimisation du coût

- Alimentation multi-phase quotidienne
- 2 prémélanges non nécessairement complets
- Energie variable
- Minimisation du coût total de l'alimentation (\$/porc)

cependant les besoins des animaux pour tous les jours de l'engraissement. Grâce à cette formulation, le coût de l'alimentation peut être réduit de 4,1 %. De plus, cette méthode d'alimentation permet de réduire les rejets de phosphore de 3,3 % et ceux d'azote de 14,8 %. La comparaison du coût journalier des deux méthodes d'alimentation (Figure 1) montre que, tout le long de la croissance, le coût quotidien de l'alimentation en combinant deux aliments est plus faible. Cette différence est d'autant plus marquée en fin de phase. En effet, avec cette alimentation, le premier prémélange a un coût unitaire comparable à celui de la première phase d'une alimentation «classique» (0,39 \$/kg contre 0,40 \$/kg), tandis que le second a un coût plus faible

Figure 1 : Coût journalier de l'alimentation

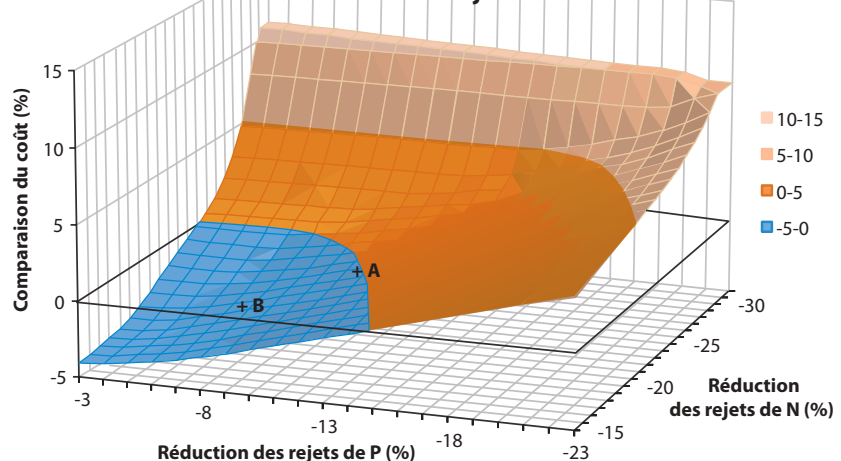


La méthode de formulation testée dans cette étude, et qui conduit à une alimentation à phase quotidienne, diminue le coût de l'alimentation pour toute la durée de la croissance.

Minimisation du coût et des rejets

- Alimentation multi-phase quotidienne
- 2 prémélanges non nécessairement complets
- Energie variable
- Minimisation du coût total de l'alimentation (\$/porc)
- Minimisation des rejets de phosphore et d'azote

Figure 2 : Comparaison du coût d'alimentation en fonction des rejets de P et de N



La forte diminution des rejets de phosphore et d'azote engendre une augmentation du coût de l'alimentation. Cependant, en utilisant la nouvelle formulation, il est possible de trouver un compromis entre réduction des rejets et diminution du coût (zone en bleu).

que les trois mélanges complets proposés dans MR (0,32 \$/kg contre 0,39-0,36-0,34 \$/kg). Dans la méthode minimisant le coût, l'ajout du second prémélange se fait progressivement tous les jours, de manière à mieux s'approcher des besoins des animaux. Il contribue ainsi à la réduction du coût total de l'alimentation.

Un compromis pour réduire le coût de l'alimentation et les rejets

La seconde étude réalisée consiste à minimiser à la fois le coût total de l'alimentation et les rejets de phosphore et d'azote. La méthode précédente a été appliquée, tout en ajoutant des contraintes sur les rejets afin de les réduire.

La Figure 2 montre ces résultats. Le pourcentage de réduction/augmentation du coût (en comparaison avec celui du rationnement classique) y est exprimé en fonction du pourcentage de réduction des rejets de phosphore et d'azote. A partir d'un certain seuil, le coût total de l'alimentation augmente (zones orangées). Toutefois, il existe beaucoup de possibilités qui réduisent le coût de l'alimentation. En effet, tous les couples (P, N) se situant dans la zone bleue de la Figure 2 sont des systèmes d'alimentation ayant un coût plus faible ou égal à la méthode de référence. Par exemple, le système réduisant les rejets de phosphore de 11,1 % et ceux d'azote de 22,4 % a un coût équivalent (-0,02 %) à la méthode classique. Ce point se situe sur la frontière entre la zone bleue et la zone orangée (point A). C'est une stratégie qui permet

de réduire considérablement les rejets sans augmenter le coût de l'alimentation. D'autres stratégies, qui sont des compromis entre réduction du coût et des rejets, peuvent être plus avantageuses. Par exemple, il existe une méthode permettant de réduire les rejets de phosphore de 8,2 % et ceux d'azote de 19 %, tout en diminuant le coût de l'alimentation de 2 % (point B).

Et après : prise en considération d'un troupeau

Cette étude, menée sur un porc moyen simulé, donne de bons espoirs quant à la mise en pratique de cette nouvelle méthode de formulation. Cependant, afin de mieux représenter la réalité, la prochaine étape consiste à considérer un troupeau et minimiser le coût et les rejets pour l'alimentation du troupeau entier plutôt que pour un animal moyen. Les questions à poser sont : faut-il que tous les animaux aient leurs besoins satisfaits ? Est-il plus avantageux de ne couvrir les besoins que de 80 ou 90 % des animaux en prenant en compte la perte due au retard de croissance ?

Cette étude a été réalisée avec le soutien financier de Swine Innovation Porc

Emilie JOANNOPOULOS,
François DUBEAU,
Jean-Pierre DUSSAULT,
Mounir HADDOU, Candido POMAR
Insa Rennes - Université de Sherbrooke -
Agriculture et Agroalimentaire Canada

Annexe D

New free energy density feeding systems : feed cost and phosphorus and nitrogen excretions study

L'article ci-après, présente les résultats des modèles présentés dans la section 1.4 et dans le chapitre 4.1 appliqués aux données de 2016. Ce n'est encore qu'une ébauche et est encore en cours de rédaction. Il sera soumis à la revue *Livestock Science*.

Pour cet article, j'ai réalisé la modélisation des différents types d'alimentation et j'ai résolu les problèmes numériquement. La partie de l'article présenté a été presque intégralement rédigé par mes soins, avec les conseils de mes coauteurs.

New free energy density feeding systems: feed cost and phosphorus and nitrogen excretions study

E. Joannopoulos^{a,b}, F. Dubeau^a, J.-P. Dussault^a, M. Haddou^b, C. Pomar^c

1. Materials and methods

1.1. Nutritional problem

The feed formulation problem in animal production consists in determining one or several mixes of ingredients that satisfy specific nutrient requirements of the animal in accordance with the production objectives (Patience et al., 1995). It is assumed in this problem that the amount of nutrients that each ingredient will supply to the animal's metabolism and total amount of these nutrients required by the animal to reach the desired production level are known. The feed (i.e., the mix of ingredients) determined in the formulation has to supply or oversupply the estimated animal nutrient requirements. The most commonly feed formulation approach used is the linear programming (Patience et al., 1995; Pomar et al., 2007). This method involves determining the best solution of a linear objective function (such as the lowest cost or maximum profit) which has to satisfy some constraints represented by linear functions. From a nutritional standpoint, all formulation methods assume that there is no ideal feed relative to the ingredients used and therefore, ingredients are selected on the basis of their availability, composition and cost (Patience et al., 1995; NRC, 2012). Furthermore, two feeds are considered equivalent if they satisfy all the imposed constraints. Linear programs can mathematically be express as

$$\begin{cases} \min_x & c^t x \\ & Ax \geq b. \end{cases}$$

The main characteristics of this model are the consequences of the linear nature of the objective function and constraints, requiring verification of the following assumptions (Wilton et al., 1974):

- Additivity - the value of the objective function is the sum of the contributions of each ingredient and, similarly, the nutritional contribution of a blend of ingredients is the sum of the nutrient contribution of each ingredient;
- Proportionality - the change in the contribution of an ingredient in a blend changes the nutritional value and cost of the blend in proportion to the change; and
- Divisibility - the incorporation of an ingredient in a mixture is divisible indefinitely.

In addition to these assumptions, linear programming requires certainty that implies that the coefficients are known and constant.

In this study, we introduce a new kind of feed formulation which is modelled by a bilinear program. A function is said bilinear when it has two variables and they are linear with respect to each of its variables (e.g., $f(x, y) = xy$). A bilinear problem consists in determining the best solution of a bilinear objective function which has to satisfy specific constraints represented by bilinear and linear functions. It is mathematically expressed as

$$\begin{cases} \min_{x,y} & f(x, y) \\ & g(x, y) \geq d \\ & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq b. \end{cases}$$

In the case of the pig diet formulation, the objective function to minimize is the feed cost and the constraints are, among others, the nutrient requirements of the animal. The characteristics of this new feed formulation model are the same as for the linear model.

A feed is said complete if, taken alone, it satisfies all the formulation constraints, that is, it contains all the nutrients that the animal will need to reach the desired level of production. Complete feeds are widely used in the industry. In this study, we introduce the notion of incomplete feeds. A feed is said incomplete if it does not satisfy all the constraints, that is, it has to be provided with other feeds or ingredients to satisfy all the animal nutrient requirements. We will see in the next section that it is possible to formulate incomplete feeds that contain complementary amounts of nutrients in such a way that when blended, the mixed feed becomes a complete feed.

1.2. Optimization methods

Pigs are raised in groups and the growth period is divided in phases within which all the pigs receive the same complete feed. The 3 phase feeding system (**3PhF**) is common in many commercial facilities. Producers increase the number of feeding phases to better adapt of protein and other nutrients supplies to the animals' requirements and at the same time, to reduce nutrient excretion, mainly nitrogen (**N**) and phosphorus (**P**). Four (**4PhF**) and more feeding phases (**pPhF**, where p is the number of feeding phases) are used large production facilities. In the daily phase feeding systems (**DPhF**) the number of feeding phases and therefore the feeds, equals the number of days in the growing period. The utilization of blend feeding and the automatic distribution of two feeds that, when combined in variable ratios, can meet the requirements of pigs throughout their growing period (Feddes et al., 2000) makes possible the use large number of feeding phases of the **DPhF** in commercial facilities. Nonetheless, it is theoretically possible to formulate every day a complete feed that matches the evolving requirements of the animals. Although this **DPhF** is impractical, it is proposed in this study to compare with conventional phase-feeding systems. This method is identified in this study as the theoretical optimal phase-feeding system (**TOPF**).

Currently, the composition of each of the feeds used in phase feeding systems is determined in order to minimize feed costs (\$/kg) and have a fixed, or narrow interval of energy density (**FE**), typically around 10.36 MJ/kg of net energy (Jean dit Bailleul et al., 2001; Beaudoin et al., 2002). Growing pigs are allowed in most countries to consume feed ad libitum from weaning until they reach market weight. The factors governing voluntary intake in growing animals are numerous and complex and correspond to long-, medium- and short-term control systems (Revell and Williams, 1993). However, it is generally accepted that pigs consume feed to meet their energy requirements (Emmans, 1981; Black et al., 1986). Then, in that case, the amount of feed intake is known before the optimization and

the decision variable is then only the composition of the feed. Assuming that pigs consume feed to meet their energy requirements, they consume a greater amount of low-concentrate feeds while limiting their consumption of energy-rich feeds (Pekas, 1983). However, this ability to adjust feed intake can be subject to the limitation of intake capacity (Black et al., 1986), although this limitation decreases as the pigs get older and heavier (Pomar and Matte, 1995; Whittemore et al., 2003). Therefore, if pigs are able to adjust feed intake to its energy requirements, and it would be possible to improve the proposed models by formulating the feeds with optimal energy density (**VE**). The three phases feeding system using **VE (3PhF-VE)** is based on the same principle as **3PhF-FE** except that the net energy (**NE**) density of each one of the three feeds can differ. In that case, the mathematical model corresponding is still linear. In that case too, the mathematical problems can be split into one linear problem for each phase. This method can be applied in general for any **pPhF** system.

The feed formulation methods generally used by the industry try to minimize the cost of the feed mix (i.e., \$/kg of feed; generally called least-cost feed formulation method). Two new feed formulation methods (daily phase and hybrid feeding systems) were developed to minimize the cost of the energy in the feed (\$/MJ of NE). In these two methods, the incomplete feed and **VE** approaches were introduced. The energy density is unknown before the optimization and it can vary from one feed to another. The **DPhF** uses two feeds, which can be incomplete, that are blended differently each day to satisfy the daily requirements of the animal. In this method, the composition of the two feeds ($X = (x_1 \ x_2)$) as well as the blended quantities ($Q = (q_{ja})_{j \in J, a \in \{1,2\}}$) have to be determined. Unlike the **3PhF** method, the mathematical model representing the **DPhF-VE** method cannot be split in phases and must be handled fully at once for the entire growth period. The formulation problem is bilinear given that the terms $q_{ja}x_a$ appear in the objective function and in some constraints. The details of the model can be found in Appendix A (A.3.3).

The new hybrid feeding system (**pHyF**) that we present in this paper is a combination of the **3PhF** and **DPhF** methods. In this feeding system, the growing period is split in p phases and within each phase a **DPhF** system is used. The particularity of this method is that two consecutive phases have one common feed and thus, only $p+1$ feeds are used overall the growing period, but only two feeds at the same time. This method is convenient because only two feeds have to be stored in the farm simultaneously, and only one feed is changed at each phase change. For example, for $p=3$ (**3HyF**) feeds 1 and 2 will be used in the first phase, feeds 2 and 3 will be used during the second phase and feeds 3 and 4 during the last phase. In particular, **1HyF** method ($p=1$) corresponds exactly to the **DPhF** system. In **pHyF**, the set of feeds $A = \{1, \dots, p + 1\}$ and the corresponding model is also bilinear.

pHyF methods, for $p=1, 2, 3, 4, 5$ and 7 , were evaluated in two different situations in this study. In the first situation, only the feed cost (i.e., \$/pig) is minimized. This case is called the mono criterion (**MC**) version and is noted **MC-pHyF** depending on the feeding system considered. In the second situation feed cost (\$/pig) and P and N excretion (kg/pig) are simultaneously optimized. It is called a tri-criteria method (**TC**) and is noted **TC-pHyF** depending on the feeding system to consider. The “ ϵ -constraints” method was used to solve all the **TC** models. Initially, a **TC** problem has three objective functions. The “ ϵ -constraints” method transforms the three objectives problem into one having one objective function and two additional constraints upper bounded by a given parameter. The problem is then solved for several sets of parameters. to solve a such problem, we only have to had the constraints

$$(TC) \begin{cases} \sum_{j \in J} m_{j,P}^t \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_{j,a} \right) - P_r \leq \varepsilon_P \\ \sum_{j \in J} m_{j,N}^t \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_{j,a} \right) - N_r \leq \varepsilon_N \end{cases}$$

to the **MC** models, where P_r and N_r are respectively the amounts (kg) of **P** and **N** retained in the animal's body, ε_P and ε_N are the stated upper bounds for **P** and **N** excretion (kg). The ε_P and ε_N upper bounds were taken as a percentage of **P** and **N** excreted in **3PhF-FE**. Thus, **P** and **N** excreted by the new methods are necessarily lower than the **3PhF-FE** excretion. The reduction of **P** and **N** excretion was studied respectively in the range from 0% to 25% and from 0% to 30% by 1% steps.

1.3. Data used

A feed manufacturer (Nicolas Lafond, Avimix Nutrition inc, Lévis, QC, Canada) provided the list of ingredients and their prices recorded at the beginning of each month from January 2016 to December 2016 (Table 1). In this study, we consider the average of the recorded prices. The list and the prices can be found in table 1, as well as the upper bound on the proportion in the feeds. In all the cases studied, a premix containing vitamins and trace minerals was included at 5 kg/t. Net energy, standardized ileal amino acids and phosphorus, and total calcium composition were taken from (NRC, 2012), the pool of nonessential amino acids was obtained by subtracting the sum of essential amino acids from the total nitrogen content.

All the simulations are based on an average pig, representative of the herd. It is bred from 20 kg to 130 kg of body weight, with an average daily gain of 1 kg/day. This pig consumes 2864 MJ of net energy during the entire growing period, namely 25.8 MJ/day. We assumed that pigs eat to satisfy its energy requirements and that the applied dietary treatments do not affect energy intake or growth. Total **P** and **N** excreted during the growing period was calculated by subtracting to the total **P** and **N** intake the amount of these elements retained in the animal body.

Table. 1. Average cost (\$/t) and maximal incorporation rate (%) of feed ingredients.

Ingredient	Average price (\$/t)	$x^{\max}(\%)$
Animal fat	1236	0.05
Barley	288	0.6
Calcium carbonate	80	1
Canola meal	317	0.05
Corn DDGS	265	0.15
Dicalcium phosphate	906	1
DL-Methionine	5 750	1
Durum wheat	321	0.4
L-Lysine HCl	2 808	1
L-Threonine	3 750	1
L-Tryptophan	57 000	1
Maize	320	0.6
Meat meal	532	0.03
Premix	5 269	0.005
Sodium chloride	198	1
Soft wheat	225	0.4
Soybean meal	455	1
Wheat shorts	242	0.25

1.4. Software

The models were implemented in AMPL (Fourer et al., 2002) and we solved the problems by using the optimization solver Ipopt (Wächter and Biegler, 2005) which uses an interior point algorithm.

2. Results

2.1. Impacts of the variable energy density in conventional phase-feeding systems

When pigs are fed with the proposed **VE** optimal density mono criterion formulation method, the feeding costs of **pPhF**, for $p=3, 5$ and 7 , and **TOPF** systems, are reduced in relation to the conventional fixed energy density method by 3.9, 4.9, 4.1 and 4.2 %, respectively (table 2). However, the amount of **P** excreted is increased by 6.5, 7.9, 8.6 and 10.1% and the amount of the excreted **N** by 6.0, 9.2, 9.8 and 13.1%, respectively.

Table. 2. Simulated feeding cost, and P and N excreted by pigs fed with conventional fixed (FE) or optimal (VE) energy density feeds and raised in traditional 3, 5 or 7 phase-feeding systems.

	FE			VE		
	Feeding cost (\$\text{pig})	P excreted (kg)	N excreted (kg)	Feeding cost (\$\text{pig})	P excreted (kg)	N excreted (kg)
3PhF	73.94	1.298	4.112	71.03	1.382	4.358
5PhF	72.20	1.237	3.780	69.03	1.335	4.126
7PhF	71.55	1.208	3.668	68.49	1.312	4.029
TOF	70.18	1.157	3.414	67.23	1.274	3.862

2.2. The hybrid feeding system

pHyF methods have a huge impact on the feeding cost when optimized in the **MC** version (Figure 1). When pigs are fed using two feeds that are blended differently each day, that is using a **DPhF-VE** method (equivalent to **1HyF-VE**), 6.69% of the feeding cost are saved. A slight increase of 0.31% of **P** excreted is produced but **N** excreted is reduced by 6.25%. When the number of phases is increased ($p=2,3,4,5$ or 7), the improvement of the feed cost is up to 8.88%, which is only at 0.19% of the unreachable bound of the **TOPF** model. At the same time, the **P** excreted decrease up to 1.69% and **N** excretion are reduced up to 6.54%, with a minimum reduction of 5.25%.

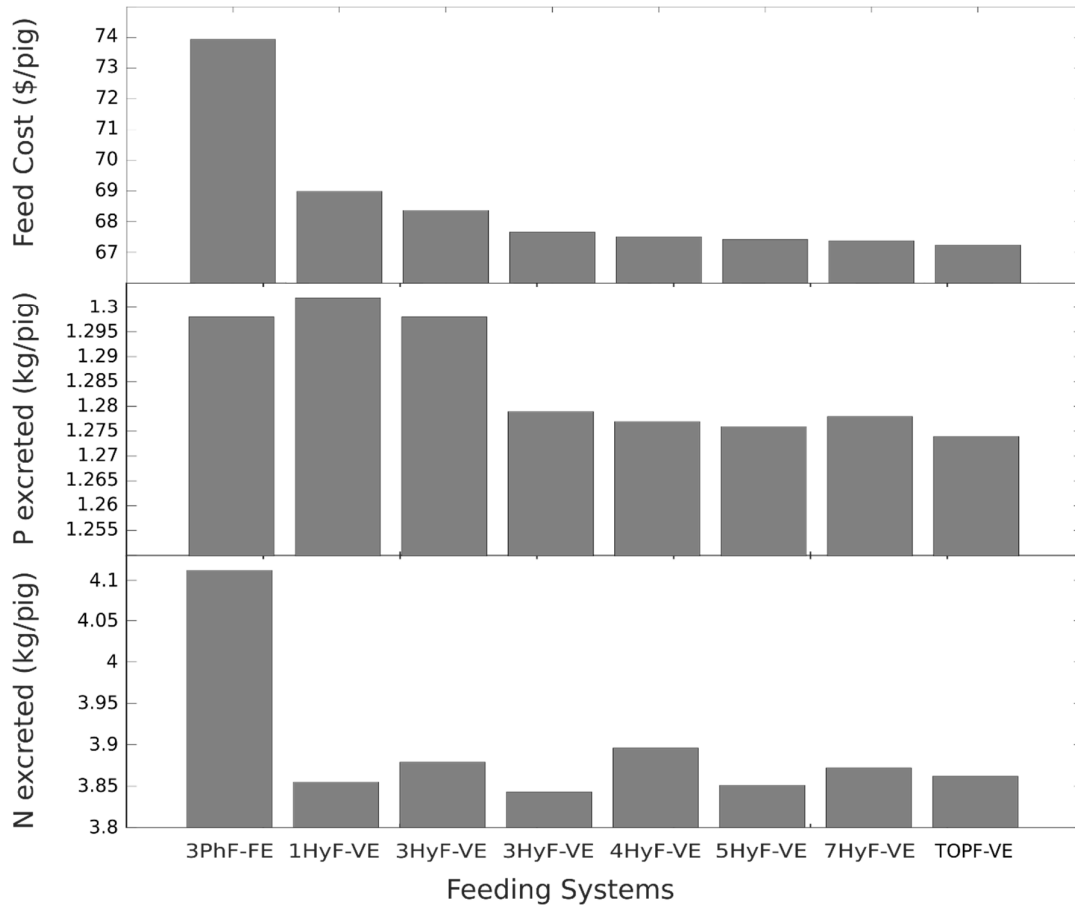


Fig. 1. Comparison of cost P and N excretion of 2PhF-FE, 1HyF-VE, 2HyF-VE, 3HyF-VE, and 4HyF-VE in the MC version.

2.3. The tricriteria optimization method

Reducing **P** and/or **N** excreted implies a feed cost increasing. However, we present some new methods that reduce feeding cost and then we could reduce **P** and **N** excretion without increasing the cost, compared to **3PhF-FE** system.

2.3.1. Tricriteria of the DPhF-VE method

Figure 2 shows results of the simulations of the **TC-DPhF-VE** method. We note expected behavior, that is the increase of the cost when **P** and **N** are reduced. However, **P** and **N** can be significantly reduced. Line A on Figure 2 represents the contour line for the **MC-3PhF-FE** method. All the couples of **P** excreted and **N** excreted (P_{ex} , N_{ex}) located under this line correspond to a **DPhF-VE** system in which the feed cost is less than the **MC-3PhF-FE** one and **P** and **N** excreted are reduced by $P_{ex}\%$ and $N_{ex}\%$ at least respectively. For example, point B (23, 23) correspond to a **DPhF-VE** system in which pigs are fed for 72.12 \$CAD, that is -2.5 % compared to the **3PhF-FE** system, and P and N excreted are reduced by 23% each.

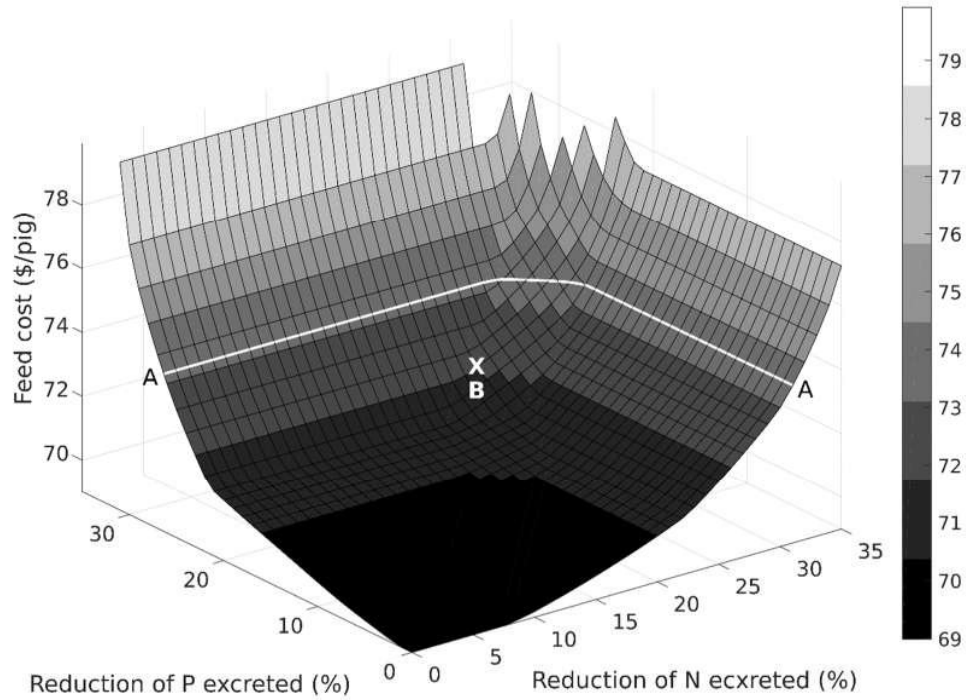


Fig. 2. Feed cost of a DPhF-TC system (\$/pig) as a function of the reduction of P and N excreted (in %, compared to 3PhF system).

2.3.2. Tricriteria of the MH3-VE method

The same study was realized for **3HyF-TC** system. Lines C and D on figure 3 represent the contour lines for the **MC-3PhF-FE** and **MC-DPhF-VE** feed costs respectively. As for the **TC-DPhF-VE** system, all the points located under these lines correspond to scenarios that reduce feed cost and **P** and **N** excretions compared to the feeding system associated to the contour line. Several points can be taken as examples. Points E and G have a feed cost equivalent to **MC-3PhF-FE** and **MC-DPhF-VE** systems respectively, namely 73.94 \$CAD and 68.98 \$CAD respectively. They also allow a reduction of **P** excreted of 23% and 15% respectively and reduce **N** excreted by 33% and 17% respectively. Point F (25,24) implies a feed cost of 71.80 \$CAD which is less than **MC-3PhF-FE** by 2.89% and H (9,15) reduces it by 7.51%.

Of course, these points are only examples and others can be taken according to the needs. Indeed, a pig producer maybe wants to reduce more **P** excreted than **N** and it is possible to find a scenario doing it, as well as one decreasing more **N** than **P**. At last, all compromises between feed cost, **P** excreted and **N** excreted can be determined.

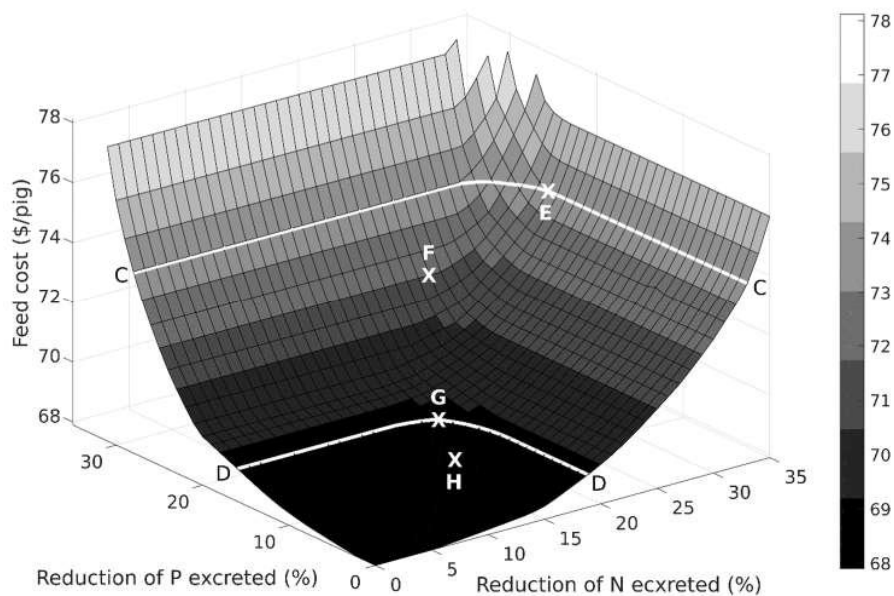


Fig. 3. Feed cost of a 3HyF-TC system (\$/pig) as a function of the reduction of P and N excreted (in %, compared to 3PhF system).

Cited literature

- Beaudoin, I., Dubeau, F., Pomar, C., 2002. Multi-objective optimization models for swine production system (A special volume published by the East-West Journal of Mathematics). Computational Mathematics and Modeling. CMM, Bangkok, Thailand, pp. 197-206.
- Black, J.L., Campbell, R.G., Williams, I.H., James, K.J., Davies, G.T., 1986. Simulation of energy and amino acid utilisation in the pig. *Res. Dev. Agric.* 3, 121-145.
- Emmans, G.C., 1981. A model of the growth and feed intake of ad libitum fed animals, particularly poultry. In: Hillyer, G.M., Whittemore, C.T., Gunn, R.G. (Eds.), *Computers in Animal Production*. The British Society of Animal Production-Occasional publication No 5. Thames Ditton, Surrey, England, pp. 103-110.
- Feddes, J.J.R., Ouellette, C.A., Leonard, J.J., 2000. A system for providing protein for pigs in intermediately sized grower/finisher barns. *Canadian Agricultural Engineering* 42, 209-213.
- Fourer, R., Gay, D.M., Kernighan, B.W., 2002. *AMPL: a modeling language for mathematical programming*. Thomson/Brooks/Cole.
- Jean dit Bailleul, P., Rivest, J., Dubeau, F., Pomar, C., 2001. Reducing nitrogen excretion in pigs by modifying the traditional least-cost formulation algorithm. *Livest. Prod. Sci.* 72, 199-211.
- NRC, 2012. *Nutrient Requirements of Swine*. National Academy Press, Washington, DC.
- Patience, J.F., Thacker, P.A., de Lange, C.F.M., 1995. *Swine Nutrition Guide*. University of Saskatchewan. Prairie Swine Center, Saskatoon, Saskatchewan Canada.
- Pekas, J.C., 1983. Effect of gastric-feeding on feed consumption, growth, organ size, and body composition of swine. *Appetite* 4, 23-30.
- Pomar, C., Dubeau, F., Létourneau Montminy, M.P., Boucher, C., Julien, P.-O., 2007. Reducing phosphorus concentration in pig diets by adding an environmental objective to the traditional feed formulation algorithm. *Livest. Sci.* 111, 16-27.
- Pomar, C., Matte, J.J., 1995. Effet de l'incorporation d'écaillés d'avoine dans l'aliment servi à volonté sur le rationnement en nutriments, la prise alimentaire et les performances de croissance du porc en finition. *Journ. Rech. Porcine* 27, 231-236.

Revell, D.K., Williams, I.H., 1993. A review physiological control and manipulation of voluntary food intake. In: Batterham, E.S. (Ed.), *Manipulating Pig Production IV*. Australasian Pig Science Association, pp. 55-80.

Wächter, A., Biegler, L. T., 2006. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming, *Math. Prog.* 106(1), 25-57.

Whittemore, E.C., Emmans, G.C., Kyriazakis, I., 2003. The relationship between live weight and the intake of bulky foods. *Anim. Sci.* 76, 89-100.

Wilton, J.W., Morris, C.A., Jenson, E.A., Leigh, A.O., Pfeiffer, W.C., 1974. A linear programming model for beef cattle production. *Can. J. Anim. Sci.* 54, 693-707.

A. Appendix A – Mathematical modeling

A.1. Notations

Let:

p be the number of feeding phases,

I be the set of ingredients,

J be the set of days of the growth period, split into p subset $J_j, j \in \{1, \dots, p\}$,

N^* be the set of nutrients (e.g. net energy, lysine, calcium, ...),

A be the set of the feeds (e.g. $A = \{1, 2, 3\}$ when three different feeds are used),

$M = (m_{in})_{i \in I, n \in N^*}$ be the matrix of the nutritional composition of the ingredients, where the column m_n is a vector representing the amount of nutrient n in each ingredient,

$\underline{b}_n = (\underline{b}_{nj})_{n \in N^*, j \in J}$ be the daily pig requirement in nutrient n ,

$\overline{b}_n = (\overline{b}_{nj})_{n \in N^*, j \in J}$ be the daily maximum amount of nutrient n ,

$W^{\max} = (W_j^{\max})_{j \in J}$ be the vector representing the intake capacity, the maximal amount of feed intake,

$c = (c_i)_{i \in I}$ be the prices of ingredients,

$x^{\max} = (x_i^{\max})_{i \in I}$ be the maximal proportion each ingredient in the feeds,

$X = (x_{ia})_{i \in I, a \in A}$ be the feed matrix, where the column x_a represents the composition (in proportion) of feed a ,

$Q = (q_{ja})_{j \in J, a \in A}$ be the feed intake matrix, where the column q_a represents the daily amount of feed intake of feed a for the growth period.

In the following, vectors are usually column. Thus, if v is a vector, v^t is “ v transpose”.

A.2. Objective function and constraints modeling

Using the notations in A.1, the diet of day j is given by

$$\sum_{a \in A} q_{ja} x_a.$$

Thus, the objective function representing the diet cost is given by

$$\sum_{j \in J} c^t \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_{\cdot a} \right).$$

The pig will reach the desired production level if the diet satisfies two types of constraints: the constraint on the nutrient requirements, given, for all $n \in N^*$ and $j \in J$, by the bounded constraint

$$\underline{b}_{nj} \leq m_{\cdot n} \left(\sum_{a \in A} q_{ja} x_{\cdot a} \right) \leq \overline{b}_{nj},$$

and the feed intake constraint is given by

$$\sum_{a \in A} q_{ja} \leq W_j^{\max}.$$

For simplicity, the set of constraints of day j will be noted S_j . Thus, $(q_{ja} x_{\cdot a}) \in S_j$ means that the diet $(q_{ja} x_{\cdot a})$ satisfies the constraints of day j .

Three other constraints will appear in mathematical models. The amount of feed intake has to satisfy the non-negativity constraints, given by

$$q_{\cdot a} \geq 0 \quad \forall a \in A.$$

Moreover, the feeds have to satisfy the proportion and the maximal proportion constraints in addition to the non-negativity constraint, which are given by

$$0 \leq x_{\cdot a} \leq x^{\max} \quad \forall a \in A,$$

$$\sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \quad \forall a \in A.$$

A.3. Feeding system modeling

A.3.1. 3PhF-FE

In the 3PF-FE feeding system, the given amount of each ingredient is known since the energy density is fixed. Then, the decision variables are only $X = (x_{\cdot 1} \ x_{\cdot 2} \ x_{\cdot 3})$, the composition of the three feeds. The linear model associated with this feeding system is given by

$$(3PhF - FE) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min_X & \sum_{j \in J} c^t (q_{j1} x_{\cdot 1} + q_{j2} x_{\cdot 2} + q_{j3} x_{\cdot 3}) \\ \text{subject to} & q_{j1} x_{\cdot 1} \in S_j \quad \forall j \in J_1 \\ & q_{j2} x_{\cdot 2} \in S_j \quad \forall j \in J_2 \\ & q_{j3} x_{\cdot 3} \in S_j \quad \forall j \in J_3 \\ & 0 \leq x_{\cdot a} \leq x^{\max} \quad \forall a \in A \\ & \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \quad \forall a \in A \end{array} \right.$$

In a mathematical standpoint, this model can be split in one optimization problem for each phase

$$(3PhF - FE)_{J_a} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x_a} \quad \sum_{j \in J_a} c^t(q_{ja}x_a) \\ \text{subject to} \quad q_{ja}x_a \in S_j \quad \forall j \in J_a \\ 0 \leq x_a \leq x^{\max} \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \end{array} \right.$$

For each subproblem, the feed x_a must be complete for the entire phase and thus satisfy the requirements of each day of the phase, i.e. the highest lower bound and the lowest upper bound of the phase of all constraints.

Let

$$S_{J_a}^{\max} = \left\{ y_{ja} = q_{ja}x_a \left| \begin{array}{l} \max_{j \in J_a} \underline{b}_{nj} \leq m_{\cdot n}(\sum_{a \in A} q_{ja}x_a) \leq \min_{j \in J_a} \overline{b}_{nj} \quad \forall n \in N^* \\ \sum_{a \in A} q_{ja} \leq \min_{j \in J_a} W_j^{\max} \\ q_a \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

The problem $(P - FE)_{J_a}$

$$(P - FE)_{J_a} \left\{ \begin{array}{l} \min_{x_a} \quad \sum_{j \in J} c^t(q_{ja}x_a) \\ \text{subject to} \quad q_{ja}x_a \in S_{J_a}^{\max} \\ 0 \leq x_a \leq x^{\max} \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \end{array} \right.$$

makes it possible to determine the diet composition of the feed for each phase.

A.3.2. 3PhF-VE

As for 3PhF-FE, the model associated with 3PhF-VE feeding system is linear. It might not be obvious so we will detail the steps.

Since the energy density of the feeds is unknown, the amount of feed intake (q_{ja}) is not known either, as well as the feed compositions (x_a). The model is then

$$(3PhF - V \text{ B}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x, Q} \quad \sum_{j \in J} c^t(q_{j1}x_{\cdot 1} + q_{j2}x_{\cdot 2} + q_{j3}x_{\cdot 3}) \\ \text{subject to} \quad q_{j1}x_{\cdot 1} \in S_j \quad \forall j \in J_1 \\ q_{j2}x_{\cdot 2} \in S_j \quad \forall j \in J_2 \\ q_{j3}x_{\cdot 3} \in S_j \quad \forall j \in J_3 \\ 0 \leq x_a \leq x^{\max} \quad \forall a \in A \\ \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \quad \forall a \in A \\ q_a \geq 0 \quad \forall a \in A \end{array} \right.$$

As for (3PhF-FE), the problem is separable in one subproblem for each phase and we have the following model:

$$(3PhF - V \ B_{J_a}) \begin{cases} \min_{x_a, q_a} & \sum_{j \in J_a} c^t(q_{ja}x_{.a}) \\ \text{subject to} & q_{ja}x_{.a} \in S_j \quad \forall j \in J_a \\ & 0 \leq x_{.a} \leq x^{\max} \\ & \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \end{cases}$$

In that form, the problem is bilinear and not linear. The most restrictive constraints given by (1) make it possible to determine the diet $x_{.a}$ of the phase J_a that meet these requirements. Let it be named $(P - V \ B_{J_a})$. If $y_{.ja} = q_{ja}x_{.a}$, then $\sum_{i \in I} y_{ija} = q_{ja}$ and the model $(P - V \ B_{J_a})$ can be written as a linear one by replacing bilinear terms $q_{ja}x_{.a}$ by $y_{.ja}$:

$$(P - V \ B_{J_a}) \begin{cases} \min_{y_{.ja}} & \sum_{j \in J_a} c^t y_{.ja} \\ \text{subject to} & y_{.ja} \in S_{J_a}^{\max} \\ & 0 \leq y_{.ja} \leq x^{\max} \left(\sum_{i \in I} y_{ija} \right) \end{cases}$$

Once the feed ($x_{.a}$) is determined, we fix it in the $(3PF - V \ B_{J_a})$ and the problem becomes linear.

A.3.3. DPhF

The DPF system minimizes the total feed cost (\$/pig). It uses VE and only two feeds that will be combined differently each day to meet the daily requirements. Thus, the variables are X and Q . In that case, $A = \{1,2\}$ and the minimization problem is written:

$$(DPHF) \begin{cases} \min_{X, Q} & \sum_{j \in J} c^t(q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2}) \\ \text{subject to} & q_{j1}x_{.1} + q_{j2}x_{.2} \in S_j \quad \forall j \in J \\ & 0 \leq x_{.a} \leq x^{\max} \quad \forall a \in \{1,2\} \\ & q_{ja} \geq 0 \quad \forall a \in \{1,2\}, \forall j \in J \\ & \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \quad \forall a \in \{1,2\} \end{cases}$$

Unlike 3PF systems, this one is not separable and then cannot be split. It has to be handled fully at once. This problem is bilinear due to the terms $q_{ja}x_{.a}$ appearing in the objective function and some constraints.

A.3.4. pHyF

The pHyF system also minimizes the total feed cost (\$/pig) and it uses VE. The growth period is split into p phases and a DPhF method is used in each phase. The particularity is that two consecutive phases have one feed in common and thus $p + 1$ feeds are used. In that case, $A = \{1,2, \dots, p, p + 1\}, J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p$ and it also has to be handled fully at once. It is a bilinear problem and it is written:

$$(pHyF) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,Q} & \sum_{j \in J} \sum_{a \in A} c^t(q_{ja}x_{.a}) \\ \text{subject to} & q_{ja}x_{.a} + q_{j(a+1)}x_{.(a+1)} \in S_j \quad \forall j \in J_a, \forall a \in \{1, \dots, p\} \\ & 0 \leq x_{.a} \leq x^{\max} \quad \forall a \in \{1, \dots, p+1\} \\ & q_{ja} \geq 0 \quad \forall a \in \{1, \dots, p+1\}, \forall j \in J \\ & \sum_{i \in I} x_{ia} = 1 \quad \forall a \in \{1, \dots, p+1\} \\ & q_{j1} = 0 \quad \forall j \notin J_1 \\ & q_{ja} = 0 \quad \forall j \notin J_a \cup J_{a+1}, \forall a \in \{2, \dots, p\} \\ & q_{j(p+1)} = 0 \quad \forall j \notin J_p \end{array} \right.$$

A.3.5. TOPF

The TOPF system consists in finding the optimal feed at each day of the growth. It uses VE and the model can be written

$$(TOPF) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,Q} & \sum_{j \in J} c^t(q_{jj}x_{.j}) \\ \text{subject to} & q_{jj}x_{.j} \in S_j \quad \forall j \in J \\ & 0 \leq x_{.j} \leq x^{\max} \quad \forall j \in J \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \\ & q_{.j} \geq 0 \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

We see that this problem is separable and can be split into one problem for each day. Using the same trick as for 3PF-VE, let $y_{.j} = q_{jj}x_{.j}$. Then $\sum_{i \in I} y_{ij} = q_{jj}$ and the problem for day j , $(TOPF)_j$, can be written as the following linear model

$$(TOPF)_j \left\{ \begin{array}{ll} \min_{y_{.j}} & \sum_{j \in J} c^t y_{.j} \\ \text{subject to} & y_{.j} \in S_j \\ & 0 \leq y_{.j} \leq x^{\max} \left(\sum_{i \in I} y_{ij} \right) \end{array} \right.$$

Annexe E

Saving costs and the environment by mixing pig diets

Cet article est paru sur le site PigProgress.net ainsi que dans la revue papier associée. L'article peut être trouvé à l'adresse suivante :

<http://www.pigprogress.net/Finishers/Articles/2017/2/Saving-costs-and-the-environment-by-mixing-pig-diets-93171E/>

Finishers

News *Feb 10, 2017* 2927 views 3 comments

Saving costs and the environment by mixing pig diets

By mixing feed phase rations for grow-finishing pigs, Canadian researchers have been able to reduce both feeding costs as well as the mission of harmful compounds in the environment.

Researchers from the University of Sherbrooke, Canada and Agriculture and Agri-Food Canada teamed up with scientists from the French National Institute of Applied Sciences (INSA) in Rennes, France, to develop this novel way of diet formulation. The study was presented at the French Swine Research Days (JRP), held January 31 and February 1, 2017.

Reducing costs of pig feed

Essentially the new feeding strategy is based on a traditional feeding system, which is based on phases, combined with an advanced feeding system, using blend feeding. The scientists stated that their plan stemmed from the notion that feed costs are the most important part of the production cost, so any reduction is a bonus.

For each phase, the scientists made the feed system use 2 diets. These would be blended together to satisfy the daily animal requirements. In an example, they wrote in the abstract: "For 3 phases, one will use 4 feeds (A, B, C, and D): A and B will be used in the first phase, B and C in the second phase and finally C and D in the last phase."



Feed cost reduction of 5.2%

The scientists concluded that, compared to the traditional feeding system, this combination of diets led to a feed cost reduction of

By mixing feed diets, it is possible to reduce feed costs. Photo: Henk Riswick
5.2%. In addition, they found that nitrogen (N) and phosphorus (P) excretion also decreased, by 17.8 and 2.2%, respectively.

Reduce also excretions

They continued to write that, if minimisation of excretions, would be added to feed cost as a criterion, it would even be possible to design a feeding system, cost-equivalent to a traditional feeding system using 3 phases, and reducing phosphorus and nitrogen excretion, by 16% and 18% respectively.

Moreover, they wrote, one could also design feeding systems being cost-equivalent to a feeding system blending feeds (using 2 diets and 1 phase and reducing feed cost by 4%), which would reduce phosphorus and nitrogen excretions by 8% and 17% respectively.

The research was done by François Dubeau and Jean-Pierre Dussault, University of Sherbrooke, Canada; Mounir Haddou, INSA Rennes, France; Candido Pomar, Agriculture and Agri-Food Canada; and lead author was Emilie Joannopoulos, attached to both the University of Sherbrooke and INSA Rennes.



Reed Business bv. Copyright reserved.

The following rules apply to the use of this site: Terms of Use and Privacy / Cookie Statement



Annexe F

Low cost diets with low excretions levels - it is possible

Cet article est paru sur le site PigProgress.net ainsi que dans la revue papier associée. L'article peut être trouvé à l'adresse suivante :

<http://www.pigprogress.net/Nutrition/Articles/2017/6/Low-cost-diets-with-low-excretion-levels-it-is-possible-150775E/>

Nutrition

Background *Jun 28, 2017* 1601 views 1 comment

Low-cost diets with low excretion levels – it is possible

Formulating pig diets is always a compromise. Do pig producers for example choose minimal feed costs or a diet aimed at achieving low excretion levels? Recent research points out that perhaps they needn't choose at all...

Currently feed represents more than 70% of the production cost in the growing-finishing pig industry. Most commonly in Canada, pigs are fed accordingly to a three-phase feeding system with fixed energy density (3PF-FE). In this system, the growth period is split into three phases and in each phase, a complete feed is used which has a fixed energy density, being 10.36 MJ/kg.

Not only the nutritional value of feed is important, so is its environmental impact. This is frequently cited because of the pollution caused by the manure spreading. Quantities of phosphorus (P) and nitrogen (N) excreted using that traditional three-phase feeding system are 1.2 kg/pig and 3.4 kg/pig respectively.

With both the nutritional as well as the environmental values in the back of their minds, a research team* consisting of French and Canadian scientists, started out designing new types of pig diets. As a reference, results were always compared to the traditional three-phase feeding system with fixed energy density which had a feed cost of CAN\$ 100.33/pig (US\$ 73.45) at the time of the trial.



The pigs in combination with the DPF system, blending two feeds. Photo: Emilie Joannopoulos

Minimising feed costs and excretion

For several years now, mathematics is used to model the feeding formulation and optimisation methods are used in order to minimise the feed cost and/or phosphorus and nitrogen excretions.

The first studies done in this field were realised at the end of the 1990s and consisted of finding a new way to model pig diets, solving mathematical problems and evaluating the economic impact of this new formulation method. As a result of these studies it was shown that an increase in the number of phases produces a decrease in feed cost.

As an extreme example it is possible to show that moving from the three-phase feeding system to an ideal method at fixed energy density (IF-FE) which is a feeding system considering one phase per day with fixed energy, can reduce feed cost by 3.33%.

However, this feeding system is impracticable for a grower due to the high number of feeds to store. From a mathematical point of view, the models presented in these studies are linear and can be solved easily thanks to existing algorithms and solvers.

Reducing phosphorus and nitrogen

A few years later, studies at the university were done in order to find minimal feed costs while reducing phosphorus and nitrogen excretions. This study did not consider a traditional three-phase feeding system, but rather a feeding system in two phases, such as is more commonly used by European pig producers.

The study showed that feed costs increase when phosphorus and nitrogen excretions are reduced. However, excretions can be considerably reduced with a relatively small feed cost increase. From a mathematical point of view, the problem was modelled as a multi-objective problem. Moreover, the model is still linear and thus easy to solve.

Developing a new feeding system

Since 2011, researchers at the University of Sherbrooke have worked on the development of a new feeding system.

Firstly, they introduced the concept of variable energy density which consists of freeing the energy density of a diet. For example, for a three-phase feeding system with variable energy, the growth period was split into three phases and the complete feed was determined so that it would minimise costs for each phase. Feeds used in each phase can have a different energy density which is unknown prior to the optimisation. As a consequence, feed costs can be reduced by 2.37%. The study showed, however, different results on excretions with a reduction of nitrogen excreted of 5.78% and an increase of phosphorus excreted by 4.9%.

The ideal feeding system with variable energy (IF-VE), which consists of feeding pigs with the optimal cost diet at each day without knowing the energy density of the feed before the optimisation, has a feed cost of CAN\$ 94.84 (US\$ 69.43), which is 5.5% less than the traditional three-phase feeding system with fixed energy density. The mathematical model associated with this feeding system is still linear and easy to solve.



Close up of the DPF feeding system. Photo: Emilie Joannopoulos

is defined for each day.

This feeding programme was studied for several strategies: the energy density can be either fixed or variable and the feeds can be either known before the optimisation or not. In the case of unknown feeds, they can be not complete for a particular day, however, when they are daily blended, they satisfy the requirements day-to-day. In that case, the mathematical model is bi-linear and much harder to solve than the linear ones.

Feeding system based on blend of two feeds

Secondly, a feeding system was introduced, based on the blend of two feeds. This feeding system is useful for a precision feeding method, called 'daily phase feeding' (DPF). In this feeding system, only two feeds will be used and a blend of them

The case of using fixed energy density and known feeds, one feed corresponding to the optimal diet of the first day and the other feed corresponding to the one of the last day, was studied by in 2014. The model associated to this feeding system is once again linear. The results show that using a DPF system can considerably decrease feed cost.

However, a study made in 2015 shows that relationships exist between each feeding system and their corresponding models are presented in details. It became clear that using a DPF system with variable energy density and unknown variables has the best feed cost. Such a feeding programme reduces feed cost by 4%. Moreover, phosphorus and nitrogen excreted can be reduced by 3.3% and 14.8% respectively.

Adding constraints on excretions

This feed cost reduction encouraged to improve the model by adding constraints on phosphorus and nitrogen excretions. The model was combined with the multi-objective one. Using it, it is possible to determine diets on the basis of feed cost, phosphorus excreted and nitrogen excreted, which would reduce the three of them at the same time.

For example, a feeding system can be determined to have the same feed cost as the one currently used and decrease phosphorus and nitrogen excretions by 11.1% and 22.4% respectively. Another feeding system could be chosen to have a decrease in cost of 2% and reductions of phosphorus and nitrogen excretions by 8.2% and 19% respectively.

New hybrid feeding system

The next step was to introduce a new hybrid feeding system which is a mix between a phase feeding system and the DPF method. The concept is as follows: the growth period is split in X phases (to be determined). For each phase, a DPF system was used with unknown feeds and variable energy, and finally two consecutive phases using a common feed.

For example, when $X=3$, the growth period is split into three phases, feeds 1 and 2 are used in the first phase, feeds 2 and 3 are used in the second one and feeds 3 and 4 are used in the last one. This feeding system is easy to set up because for each phase, only two feeds are used. Using it for minimising the feed cost, it was possible to reduce it by 5.19% while phosphorus and nitrogen excreted are reduced by 2.2% and 17.8%.

Reducing feed costs and excretions

As for the DPF system, the research team combined it with the multi-objective method and reached the same conclusions. It is feasible to determine a lot of feeding systems that reduce both feed cost and excretions. The first example has the same feed cost as a three-phase feeding system using fixed energy but reduces phosphorus and nitrogen excreted by 18% and 16%. Another one can have the same feed cost as DPF, namely a decrease of 4% and reduces phosphorus and nitrogen excretions by 8% and 17% respectively.

In both cases, solutions obtained are examples of results using multi-objective optimisation techniques. Somebody else may prefer to reduce the excretion of phosphorus considerably while the nitrogen that is excreted is not restricted, or the opposite, or even a compromise for both. It is possible to determine a such feeding system.

References available on request.

** Also collaborating on the research: François Dubeau and Jean-Pierre Dussault, University of Sherbrooke, Canada; Mounir Haddou, INSA Rennes, France and Candido Pomar, Agriculture and Agri-Food Canada.*

Emilie Joannopoulos

Annexe G

A bilinear model with applications in the feed industry and its global solution analysis

Cet article regroupe les résultats sur l'optimisation globale du problème bilinéaire appliqué à l'industrie porcine. Il a été soumis à *Journal of Global Optimization*.

A bilinear model with applications in the feed industry and its global solution analysis

Emilie Joannopoulos · François Dubeau ·
Jean-Pierre Dussault · Mounir Haddou · Candido
Pomar

Received: date / Accepted: date

Abstract We present a bilinear model which uses both bilinear objective and constraints. Its usage is motivated within a feed industry application. Our model is a large scale problem for global solvers and they cannot solve it. Standard nonlinear solvers get a local minimizer, and we conjecture that this local optimal solution is also a global minimizer. Among arguments to support our conjecture is the fact that, for smaller instances solved by a global solver, both local and global solvers compute the same solution. An absolute lower bound of this problem is known and it is proven to be equivalent to both the McCormick and the SDP relaxation.

1 Introduction

Finding the global solution to nonlinear non convex problems has been an active research interest for several years. Few global solvers exist, such as BARON [22, 19] or Couenne [5] and they use branch-and-bound algorithms. The branch-and-bound method consists in finding lower and upper bounds of the non convex problem and refining them successively. Such algorithms are useful for relatively small scale problems but if the problem is too large it cannot be solved using such an approach. Thus, some other methods have to be found for large-scale problems. This is our case when we consider the diet problem for our application in the pig industry. We consider two typical instances. A first one having 254 variables and 2700 constraints and a second one having 258 variables and 2704 constraints. We would like to determine their global minimal solution. Indeed, this study has first and foremost a practical aim. The goal is to set up a new least cost feeding system in farms in order

to decrease the feed cost that represents more than 70% of the production cost. The two instances correspond to two feeding scenarios in time, one in 2011 and the other in 2016. Using some nonlinear solvers, we are able to compute local solutions to our problem. We conjecture that the local solution obtained is indeed a global optimum.

This paper is split in three parts. The first one states the problem that we are interested in, the diet problem and presents the "ideal model" which is known giving a lower bound. In the second one, we will describe some useful methods to determine upper and lower bounds to a nonlinear nonconvex problem. First, we will present some approaches that can solve, and possibly determine many local optimal solutions and then study the behavior of global solvers. We will conclude this section by the pooling formulation of the bilinear problem and its complexity. The third section presents several approaches that support our conjecture. An approximation of the bilinear problem is described in section 3.1. By discretizing one variable that appears in the bilinear terms, the problem can be transformed into a mixed integer linear problem. This method could give a good approximation of the optimal solution. Section 3.2 is devoted to the Lagrangian relaxation of the discrete and continuous problems. We use a subgradient method to reduce the duality gap and possibly improve the lower bound. Finally, three relaxation methods are presented in section 3.3. The best known is probably the linear relaxation introduced by McCormick in 1976 [17]. It relaxes a nonlinear nonconvex problem into a linear convex problem. This method leads to a lower bound and we prove that the model equivalent to the ideal model, as well as it is the case for the semidefinite programming relaxation we present. The last relaxation was introduced by Tawarmalani *et al.* in 2010 [21] and gives the convex hull of sets like $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n ax_i y_i + b_i x_i + c_i y_i \geq r\}$. We will try to reduce the gap between the lower and upper bounds thanks to all these approaches and we will see that some methods seem to be theoretically efficient but did not provide interesting bounds in the specific case of the diet in the pig industry.

1.1 History

The diet problem was first introduced by American economist Stigler in 1945 [20]. Initially, it was the following linear problem

$$\begin{cases} \min_x & c^T x, \\ \text{s.t.} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{cases} \quad (P_L)$$

Originally, this problem was solved by using heuristics. Then, in 1947, Dantzig developed the simplex algorithm [7, 8] and undertook to test his algorithm on Stigler's diet problem and finally made it possible to solve this problem without using heuristics.

Until today, some studies have been performed on the diet problem in general ([15, 16, 10] for example), but the linear problem is the most common model used. Moreover, a significant progress has been made in the diet modeling with the inclusion of upper bounds on variables and constraints.

The diet problem has been the subject of a lot of research studies, especially the pig industry in which feed represents 70 % of the production cost and in an economic context of international competition, it is important to reduce it. Thus, studies [2, 4] have been made in order to reduce the feed cost. Those models are currently used in the industry and are solved by linear programming.

More recently, Joannopoulos *et al.* [14] presented a new way of modeling the feeding system. This method is based on two feeds which are blended in different proportions each day. The model representing this feeding system is bilinear. More precisely, it has a bilinear objective function, and bilinear and linear constraints. Using the following notations:

- I the set of ingredients,
- J the set of days of the growing period,
- P the set of nutrients,
- x_1 and x_2 the feeds composition,
- y_1 and y_2 the daily intake quantity of feed x_1 and x_2 respectively,
- q^0 the ingredients costs,
- q^p the nutrient p supply by ingredients,
- \underline{d}^p and \bar{d}^p the lower and upper bound of nutrient p intake,
- A a matrix representing the linear constraints (proportion constraint on feed composition and daily intake capacity),
- \underline{b} and \bar{b} the lower and upper bounds of linear constraints,
- $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{y_1}, u_{y_2}$ the upper bounds on x_1, x_2, y_1 and y_2 ,

the diet problem can be summarized by the following model :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x_1, x_2, y_1, y_2} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 (x_{1i} y_{1j} + x_{2i} y_{2j}), \\ \text{s.t.} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (x_{1i} y_{1j} + x_{2i} y_{2j}) \leq \bar{d}_j^p \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_1} \\ u_{y_2} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (P_{pig})$$

In this model, each constraint is lower and upper bounded and is at least non-negative. Upper and lower bounds are equal in case of an equality constraint. This model has $2(|I| + |J|)$ variables, $|P| \times |J|$ bilinear constraints, the number of linear constraints corresponds to the number of rows of A and a maximum of $2(|I| + |J|)$ bound constraints.

A particularity of the problem is that we already know a lower bound of the optimal value which is given by the solution of the ideal model described in section 1.3.

It could be generalized by the inclusion of linear terms in the objective function and bilinear constraints but we will not consider this case in this study.

1.2 Typical instances

Throughout this article, a typical instance of our problem will be the diet problem for one average pig. We consider two scenarios. The first one with data from 2011, and the other with data from 2016.

The first instance considers a growing period of the pig of 111 days and that 16 ingredients are used. Thus, $|I| = 16$ and $|J| = 111$ for this typical instance. Two feeds are used and for each one, a vector of the quantity of the feed intake is associated which implies that the problem has $2(|I| + |J|) = 254$ variables. For this problem, $|P| = 21$ and

$A \in \mathbb{R}_{(4+|J|) \times 254}$. Thus, it has $|P| \times |J| = 2331$ bilinear constraints (including 111 equality constraints), $(4 + |J|) = 115$ linear constraints and $2(|I| + |J|) = 254$ bound constraints. It has a total of 2700 constraints.

In the second scenario, only the list of ingredients and their price change: 18 ingredients are used and then $|I| = 18$. There are therefore 258 variables, 2331 bilinear constraints, 115 linear constraints and 258 bounds variable, that is, a total of 2704 constraints.

In both scenarios, the constraints associated with the daily energy requirement are 111 bilinear equality constraints. The feeds are modeled in proportions. Thus, two more linear equality constraints are given by the sum of the ingredients of each feed which is equal to 1. Moreover, the proportion of one ingredient is fixed to be 0.5% in each feed which leads to a total of 226 equality constraints. Linear inequality constraints are most of the inequality constraints are given by the nutrient requirements and intake capacity which is given by $y_1 + y_2$ is upper bounded, while the others are bound constraints on the variables.

When the diet of a herd is modeled, the size of the problem quickly increases. We model the diet in a way that only two feeds are used for all pigs but each one has specific quantities and the diet has to satisfy the daily requirements of all pigs. This implies that for each pig added in the herd, $2|J| = 222$ variables and $(|P| + 3) \times |J| = 2664$ constraints are added.

We will see in section 2.3 that we encounter some difficulties when we consider the diet problem for only one pig and the same kinds of difficulties have to be handled for a herd. Thus, for the sake of simplicity, the typical instances of our problem will consider only one average pig.

1.3 The ideal model: lower bound

The ideal problem consists in using the optimal cost feed at each day. This model is a relaxation of the problem (P_{pig}) . Instead of using only two feeds, we use $|J|$ feeds, i.e. variables of the model are $x_1, \dots, x_{|J|}$ in addition to the daily feed intake, i.e. $y_1, \dots, y_{|J|}$. Then the model is derived from (P_{pig}) and is written as

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{X,Y} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 x_{ij} y_j, \\ \text{s.t.} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p x_{ij} y_j \leq \bar{d}_j^p \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{|J|} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{|J|} \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_j} \\ u_{y_j} \end{pmatrix} \quad \forall j \in J. \end{array} \right. \quad (P_{pigId})$$

The shape of the matrix A makes this problem separable in one subproblem for each $j \in J$ for our typical instances. By introducing a new variable $z_{ij} = x_{ij} y_j$, and adjusting the linear

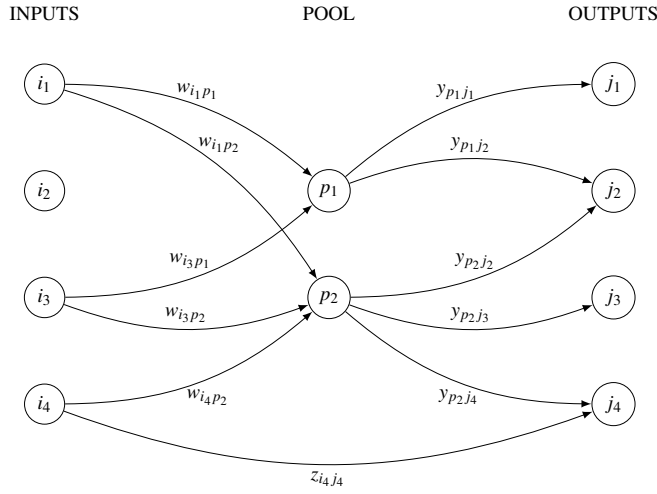


Fig. 1 Illustration of the pooling problem

constraints, each subproblem can be modeled as a linear problem as follows :

$$\begin{cases} \min_z \sum_{i \in I} q_i^0 z_{ij}, \\ \text{s.t.} \quad \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p z_{ij} \leq \bar{d}_j^p & \forall p \in P, \\ \underline{b} \leq Bz_{\cdot j} \leq \bar{b}, \\ 0 \leq z_{ij} \leq u_{z_j} & \forall i \in I. \end{cases} \quad (P_{SPigId_j})$$

Its global solution can be obtained easily by a linear solver and its optimal value is 94.84\$ for instance 1 and 67.23\$ for instance 2.

Nevertheless, the associated feeding system is impracticable for growers due to the high number of feeds to store (1 per day), but the solution will be kept in mind as a lower bound of the problem (P_{pig}).

1.4 Pooling problem

The diet problem as we described it above can be associated with a particular pooling problem. Here, we will describe two ways to model a pooling problem, the p -formulation and the q -formulation.

The standard pooling problem was introduced by Haverly [13] in 1978. The concept of the pooling problem is the following. Inputs are sent into pool tanks to be blended together. Then mixtures from the pools are sent to outputs to get the final products. Moreover, inputs can be directly added to the final products. The pooling problem may be illustrated by a graph (Figure 1). In the p -formulation of a pooling problem, the variables, associated with the flow (w_{ip}), are modeled in quantity flowing on each edge. The particularity of this formulation is that we have to add a flow conservation constraint in addition to all the specification requirements. This constraint can be formulated as

$$\sum_{i \in I} w_{ip} = \sum_{j \in O} y_{pj} \quad \forall p \in P.$$

This is how Haverly introduced the pooling problem.

Then, Ben-Tal *et al.* [6] proposed to model the flow between inputs and pools using proportions. This is the q -formulation. In this formulation we also have to include a constraint defining the proportion entering in tanks

$$\sum_{i \in I} w_{ip} = 1 \quad \forall p \in P.$$

In the case of the pig's diet problem, inputs cannot be directly added to outputs. For example, the edge $z_{i_4 j_4}$ from input i_4 to output j_4 on figure 1 will not be allowed. From now on, we will not consider such edges.

1.5 Complexity of the problem

We can also discuss about the complexity of the pooling problem and especially of the one modeling our instances.

Proposition 1 *The pooling problem representing the pig's diet problem is strongly NP-hard.*

Proof The pooling problem was proven to be strongly NP-hard if $\delta^-(p)$ and $\delta^+(p)$, the input and output degrees of pool p respectively, are at least 2 then the problem is NP-hard for all pools (see Proposition 1 in [1]).

In our instances, $|INPUTS| = |I| \geq 16$ and $|OUTPUTS| = |J| = 111$. Some constraints on the feed composition impose that we will have at least two inputs to the pool, i.e. at least two ingredients in the feed. About output degrees, if both pools have only one outgoing edge, then 99 outputs will not have any entries, which does not satisfy the constraints. Thus, at least one pool has two or more outgoing edges and then the pig's diet problem is strongly NP-hard.

2 Is the local optimal solution a global one ?

In order to solve the bilinear problem, the (P_{pig}) model was implemented using AMPL [9]. A local optimal solution of the typical instances can be computed by any nonlinear solver. We solved the problem by using the Ipopt solver and obtained an optimal value of 96.23 for instance 1 and 68.99 for instance 2.

2.1 Conjecture

In order to find another minimum to this problem, we ran the nonlinear solver with 20,000 different starting points. The starting points were taken randomly in the set $[0, u]$ and the problem was then solved by using Ipopt.

In each instance, the optimal solutions returned by the solver for each initial point are identical and have an optimal value of 96.23 for instance 1 and 68.99 for instance 2.

This experiment tends to prove that there is no better solution than the one computed by Ipopt. Hence, we state the following conjecture.

Conjecture *The optimal solution of the model (P_{pig}) as computed by any non linear solver is a global optimal solution.*

	$ I $	$ J $	Solvers		
			Couenne	BARON	Ipopt
Instance 1	16	2	N/A	1.02	1.02
	16	3	N/A	1.54	1.54
	16	4	N/A	N/A	2.07
	16	111	N/A	N/A	96.23
Instance 2	18	2	N/A	0.80	0.80
	18	3	N/A	1.21	1.21
	18	4	N/A	N/A	1.62
	18	111	N/A	N/A	68.99

N/A : not available

Table 1 Comparison of nonlinear solvers (Couenne, BARON and Ipopt) optimal value.

2.2 Finding a lower solution thanks to a feasibility problem

One way to find a solution that has a strictly less value than the one computed by Ipopt is to deal with feasibility problems. The aim of the feasibility problem is to find a feasible point without regard to the objective function. For example, if we consider the optimization problem

$$\begin{cases} \min_x & f(x), \\ \text{s.t.} & x \in S, \end{cases}$$

which has a local optimal solution x^* , then we can solve the problem

$$\begin{cases} \min_x & 0, \\ \text{s.t.} & x \in S, \\ & f(x) \leq f(x^*) - \xi, \end{cases}$$

where $\xi > 0$, to find a feasible point which has an optimal value strictly lower than the $f(x^*)$.

We solved this problem for our typical instance with $\xi = 0.01$ and the solver was not able to compute a solution in either one of the instances. This experiment therefore supports the conjecture.

2.3 Performance of global solvers

The global solution of a non linear non convex optimization problem can be computed by global solvers like Couenne and BARON. The nonlinear solver Ipopt returns a solution guaranteed only as a local optimum. As we can see in table 1, neither Couenne nor BARON can compute an optimal solution for the full (P_{rig}) problem, i.e. when $|J| = 111$, and reached the time limit set to 8 hours. Considering a smaller problem ($|J| = 2$ to 4) rather than our typical instance, Couenne is not able to compute the global solution and also reaches the time limit, while BARON, for its part, returns a solution for $|J| = 2$ and $|J| = 3$ but cannot handle the problem for a higher value of $|J|$, for both instances that we consider.

On the other hand, Ipopt returns a solution for each instance, but it only guarantees that it is a local optimum. However, notice that the optimal solution obtained for $|J| \in \{2, 3\}$ by Ipopt has the same optimal value than the one of the global optimal solution returned by BARON. Thus, it supports the conjecture.

2.4 Solutions of the pooling problem

We present in section 1.4 two different formulations of the pooling problem. Both formulations are equivalent but the way to model the problem is different. We can wonder if the nonlinear algorithms handle both models in the same way.

These two formulations of the pooling problem were implemented in AMPL. Both p -formulation and q -formulation return exactly the same solution when they are solved by the nonlinear solver Ipopt for both typical instances, that is an optimal value of 96.84 for instance 1 and 68.9 for instance 2.

2.5 Penalization of bilinear terms

Bilinear terms can also be penalized in the objective function. Consider the following bilinear problem

$$\begin{cases} \min_{x,y} f(x,y) \\ \text{s.t. } g(x,y) \leq 0 \end{cases}$$

where f and g are bilinear functions. Introduce new terms z . Replace bilinear terms xy in the constraints by z and penalize the distance from z to xy in the objective function. We now consider the problem

$$\begin{cases} \min_{x,y} f(x,y) + \xi \|z - xy\|^2 \\ \text{s.t. } \tilde{g}(x,y,z) \leq 0 \end{cases}$$

where \tilde{g} is a linear function.

The more ξ is high, the more the solution is close to the original problem (P_{pig}) solution and we see it on table 2. Indeed, the third column of the table show the cost of the original objective function ($f(x)$) when the penalized problem is solved. It grows up to a value close to the solution computed by local solvers (96.23 for instance 1 and 68.99 for instance 2). If ξ is too high, e.g. 10^8 , the maximum number of iterations is reached and the computed points lead to an objective value higher than x_{ipopt}^* . However, we see that, when an optimal solution of the penalized problem is computed, it is closer and closer to x_{ipopt}^* (column 4 of the table) but still is not feasible for the original problem (column 5). These results again support the conjecture.

3 Relaxations of bilinear terms

3.1 Approximation of the global optimal solution using discretization of some variables

3.1.1 Toward a mixed integer linear program

The initial bilinear problem is designed in continuous variables. We will see that discretizing one of the variables involved in the bilinear terms yields a mixed integer linear problem.

This section is inspired by [18]. Let $0 \leq x_i \leq u_{x_i}$ and $0 \leq y_j \leq u_{y_j}$ be the variables and consider one bilinear term $x_i y_j$. One variable is discretized in base 2, for example y_j , as follows

$$y_j = u_{y_j} \sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk}$$

	ξ	$f(x^*) + \xi \ x^* - \bar{x}^*\ $	$f(x^*)$	$\ x^* - x_{ipopt}^*\ _2$	$d(x^*, X)$
Instance 1	0,1	2.19	6.90e-05	612.91	8282.84
	1	21.93	4.55e-07	612.11	8282.84
	10	78.64	66.02	38.11	1848.93
	100	90.48	88.68	4.30	230.42
	1 000	93.86	92.90	4.26	69.19
	10 000	95.23	94.92	0.29	15.52
	100 000	95.89	95.58	0.59	3.84
	1 000 000	96.19	96.15	0.04	0.48
	10 000 000	96.23	96.22	0.004	0.09
	100 000 000	N/A	N/A	N/A	N/A
Instance 2	0,1	1.90	1.40e-05	769.21	8282.84
	1	19.00	1.01e-06	767.26	8282.84
	10	57.47	50.43	102.52	1383.02
	100	64.63	63.15	5.78	245.50
	1 000	67.68	66.91	0.35	75.85
	10 000	68.68	68.49	0.06	8.88
	100 000	68.91	68.86	0.008	1.29
	1 000 000	68.98	68.97	0.02	0.25
	10 000 000	68.99	68.98	8.20e-05	0.05
	100 000 000	N/A	N/A	N/A	N/A

Table 2 Optimal costs of the penalized and the feed cost functions, distance to local solution of the initial problem (x_{ipopt}^*) and distance to the feasible set.

where $\alpha_{jk} \in \{0, 1\}$ is a binary variable and K is the sampling rate of the discretization. Now, the bilinear term is given by

$$x_i y_j = x_i u_{y_j} \left(\sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk} \right) = u_{y_j} \sum_{k=0}^K 2^{-k} \alpha_{jk} x_i.$$

We can see here that even by discretizing one variable the term is still bilinear. However, this could be modified by introducing a new variable x_{ijk} such that

$$x_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_{jk} = 0, \\ x_i & \text{if } \alpha_{jk} = 1. \end{cases}$$

This variable is set thanks to the four following inequalities

$$\begin{cases} x_{ijk} \geq 0, \\ x_{ijk} - x_i \leq 0, \\ -x_{ijk} + x_i - u_{x_i}(1 - \alpha_{jk}) \leq 0, \\ x_{ijk} - u_{x_i} \alpha_{jk} \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Thus, we get

$$x_i y_j = u_{y_j} \sum_{k=0}^K 2^{-k} x_{ijk}$$

which is a linear term in x_{ijk} . Therefore, by replacing each bilinear term by a variable like x_{ijk} and adding the four equations (1) as constraints for each one, the problem becomes linear.

First we decided to discretize y_1 and y_2 . Applying this discretization to (P_{pig}) , we obtain the following linear model :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x_1, x_2, y_1, y_2, x_1^1, x_2^1, \alpha, \beta} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} q_i^0 2^{-k} (u_{y_1} x_{ijk}^1 + u_{y_2} x_{ijk}^2), \\ \text{s.t.} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} 2^{-k} q_i^p (u_{y_1} x_{ijk}^1 + u_{y_2} x_{ijk}^2) \leq \bar{d}_j^p \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_1} \\ u_{y_2} \end{pmatrix}, \\ & x_{ijk}^1 \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^1 - x_{1i} \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & -x_{ijk}^1 + x_{1i} - u_{x_1}(1 - \alpha_{jk}) \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^1 - u_{x_1} \alpha_{jk} \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 - x_{2i} \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & -x_{ijk}^2 + x_{2i} - u_{x_2}(1 - \beta_{jk}) \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & x_{ijk}^2 - u_{x_2} \beta_{jk} \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K, \\ & \alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, \forall k \in K. \end{array} \right. \quad (P_{pigDisc})$$

This problem could be solved by mixed integer linear solvers and return an approximation of the solution of the initial problem (P_{pig}) written in continuous variables. The implementation was done in AMPL and we solved it using CPLEX 12.6 as a mixed integer linear solver.

In order to test this method, we started with a smaller instance of our problem, that is $|J| = 2$ and $|K| = 4$ and $|I|$ and $|P|$ remain unchanged. Then $|J|$ has been increased. Table 3 shows the results for $|J| = 2$ to $|J| = 7$ for both typical instances. We can notice that the values of the optimal solutions are identical for (P_{pig}) and $(P_{pigDisc})$. However, if we look at the CPU time taken by CPLEX to solve $(P_{pigDisc})$ problems, we notice that it grows exponentially. It increases tenfold for each time that $|J|$ is incremented by one. In the typical instance, $|J| = 111$. Thus, the needed time to solve the full discretized problem could be 10^{100} years. Using $(P_{pigDisc})$ instead of (P_{pig}) is a good idea to get an approximation of the global solution but is not appropriate to our problem due to its size and the branch and bound algorithm used to solve MILP. The lower bounds computed by CPLEX after 30 minutes are still lower than the one of (P_{pigId}) and thus does not improve it. Also, we observe a similar behavior when the variables x_1 and x_2 are discretized instead of y_1 and y_2 .

Even limited in size, this experiment supports our conjecture with global solutions of the discretized problem close to the continuous variable problem.

	J	(P_{Pig})		$(P_{pigDisc})$	
		obj. value	CPU time	obj. value	CPU time
Instance 1	2	1.02	0.162931	1.02	5.63164
	3	1.54	0.122153	1.54	79.3265
	4	2.07	0.437493	2.07	714.843
	5	2.61	0.180731	2.61	3,832.76
	6	3.16	0.339369	3.16	30,988.7
	7	3.71	0.478266	3.71	433,168
Instance 2	2	0.80	0.180719	0.80	4.06898
	3	1.21	0.330983	1.21	52.966
	4	1.62	0.171164	1.62	286.031
	5	2.04	0.433399	2.04	2,079.33
	6	2.47	0.389787	2.47	11,210.5
	7	2.90	0.706067	2.90	278,021

Table 3 Optimal cost of the discretized (CPLEX solver) and bilinear (Ipopt solver) model and CPU time (in seconds).

3.1.2 Continuous relaxation of the MILP

The continuous relaxation of a mixed integer linear program provides a lower bound which can be easily computed thanks to any linear solver. We apply this approach on $(P_{pigDisc})$ to determine if this lower bound is greater than the one of (P_{pigId}) .

However, this method does not improve the bound since the continuous relaxations of the MILP are 94.18 and 66.16 for instances 1 and 2 respectively, is lower than the values of the ideal model (P_{pigId}) (94.84 and 67.23).

3.2 Lagrangian relaxations

The Lagrangian relaxation provides a lower bound of the initial problem. In general terms, let

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq d \\ & (x) \in S \end{aligned}$$

be an optimization program. The Lagrangian function is defined by

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x).$$

Thus,

$$h(\lambda) = \inf_{(x) \in S} \mathcal{L}(x, \lambda)$$

is the dual function.

We are interested in looking to the duality gap between the dual and the primal optimal solutions. If it vanishes that means that the primal optimal solution is a global one. If not, the dual value may be greater than a lower bound already known and then improve it and give more information about the global optimal solution. In our instances, the known lower bound is the optimal value of (P_{pigId}) .

3.2.1 Subgradient algorithm

We know that $h(\lambda^*) = \max_{\lambda} h(\lambda) \leq f(x^*)$, but it may be hard to compute it. Thus, we use a subgradient algorithm to compute an approximation of $\mathcal{L}(\lambda^*)$. This algorithm is described in algorithm 1.

Algorithm 1: The subgradient algorithm

```

1 Select  $\lambda_0, N > 0$ ;
2 for  $k = 0:N$  do
3   Compute  $x_k^* \in \arg \min_x \mathcal{L}(x, \lambda_k)$ ;
4   Let  $g(x_k^*)$  be a subgradient of  $\mathcal{L}(x_k^*, \lambda_k)$ ;
5   Evaluate the stepsize  $\alpha_k$ ;
6    $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k g(x_k^*)$ ;

```

Several strategies can be used to compute the stepsize α_k . We tested three different ones:

- a fixed stepsize, in our case $\alpha_k = 1$;
- a diminishig non summable stepsize, which satisfies $\alpha_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ (in our case $\alpha_k = 1/k$);
- a dynamic stepsize, which is $\alpha_k = \frac{\mathcal{L}(x_k) - \mathcal{L}_k^{\text{lev}}}{\|g(x_k^*)\|}$, where f_k^{lev} is an estimate of the optimal value.

In the case of the dynamic stepsize, $\mathcal{L}_k^{\text{lev}}$ where computed in two different ways, either $\mathcal{L}_k^{\text{eval}} = \max_{0 \leq i \leq k} \mathcal{L}(x_i^*, \lambda_i)$, $\delta > 0$, or $\mathcal{L}_k^{\text{eval}} = f(x^*)$ when the optimal solution of the primal problem is known.

3.2.2 Lagrangian relaxation of the MILP

In this section, we consider the Lagrangian relaxation of the MILP in which all the difficult constraints were relaxed. We run all the strategies of this algorithm described above with parameters $\lambda_0 = 0, N = 150$ and $\delta = 1$ if necessary. The maximal value of the dual function computed of all these approaches is 70.87 for instance 1 and 48.96 for instance 2.

A discretization of the ideal model (P_{pigId}) could be done, based on the approach described in section 3.1. Its optimal value can be easily computed since the problem is separable day to day and is 95.18 for instance 1 and 67.71 for instance 2. They are considered as lower bound of the global optimal solution of the discretized problems (P_{pigDisc}). In both instances, algorithm 1 applied to discrete problem computes a lower value.

In that case, the lower bound cannot be improved for this sampling rate of discretization.

3.2.3 Lagrangian relaxation of the bilinear problem

We also applied this approach on the continuous problem. We relaxed all the bilinear terms. First we solve the primal problem using Ipopt and get a solution x_0^* . Let λ_0^* be the Lagrange multipliers associated with x_0^* . Then, we compare $f(x_0^*)$ to $h(\lambda_0^*)$.

For instance 1, $f(x_0^*) = 96.23$ and $h(\lambda_0^*) = 54.26$ and the duality gap is then 41.97. The same behavior appears for instance 2, in which $f(x_0^*) = 68.99$ and $h(\lambda_0^*) = 24.66$ and then

		Lower bound of f	$f(x_0^*)$	$\max_{0 \leq k \leq N} \mathcal{L}(x_k^*, \lambda_k)$
Instance 1	MILP	95.18	N/A	70.87
	Continuous	94.84	96.23	78.43
Instance 2	MILP	67.71	N/A	48.96
	Continuous	67.23	68.99	46.64

Table 4 Summary of the Lagrangian relaxations results.

the duality gap is 44.33. The aim of this approach consists in reducing this gap. Thus, we apply the subgradient method (algorithm 1) with $\lambda_0 = \lambda_0^*$, the Lagrange multiplier associated to x_0^* , the solution of the bilinear problem, $N = 50000$ and $\delta = \max(1/k, 10^{-4})$ if necessary.

The best value for the dual variable computed using algorithm 1 is 78.43 for instance 1 and 46.64 for instance 2. In both cases, this value is still less than the lower bound, that is the optimal value of (P_{PigId}) and then does not improve it.

For ease of reading, upper and lower bounds and best values of the relaxation have been grouped in table 4.

3.3 Convex relaxations

This section will be devoted to the presentation of three convex relaxations used to obtain lower bounds of the initial (P_{Pig}) .

3.3.1 McCormick relaxation

The first relaxation that we will present is the well-known. McCormick [17] introduced it in 1976. It provides a linear relaxation of the initial problem by using only the bounds variables. The concept is the following. Suppose that we have two variables x_i and y_j that appear in a bilinear term and such that

$$\begin{aligned} l_{x_i} &\leq x_i \leq u_{x_i}, \\ l_{y_j} &\leq y_j \leq u_{y_j}. \end{aligned}$$

From these equations, we get

$$\begin{cases} (x_i - l_{x_i})(y_j - l_{y_j}) \geq 0, \\ (x_i - l_{x_i})(u_{y_j} - y_j) \geq 0, \\ (u_{x_i} - x_i)(y_j - l_{y_j}) \geq 0, \\ (u_{x_i} - x_i)(u_{y_j} - y_j) \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_i y_j - x_i l_{y_j} - y_j l_{x_i} + l_{x_i} l_{y_j} \geq 0, \\ x_i u_{y_j} - x_i y_j - l_{x_i} u_{y_j} + y_j l_{x_i} \geq 0, \\ y_j u_{x_i} - u_{x_i} l_{y_j} - x_i y_j + x_i l_{y_j} \geq 0, \\ u_{x_i} u_{y_j} - y_j u_{x_i} - x_i u_{y_j} + x_i y_j \geq 0. \end{cases}$$

Let $z_{ij} = x_i y_j$ then we get the system

$$\begin{cases} z_{ij} - x_i l_{y_j} - y_j l_{x_i} + l_{x_i} l_{y_j} \geq 0, \\ x_i u_{y_j} - z_{ij} - l_{x_i} u_{y_j} + y_j l_{x_i} \geq 0, \\ y_j u_{x_i} - u_{x_i} l_{y_j} - z_{ij} + x_i l_{y_j} \geq 0, \\ u_{x_i} u_{y_j} - y_j u_{x_i} - x_i u_{y_j} + z_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

This system is linear in z_{ij}, x_i and y_j . A linear relaxation of the bilinear initial problem is given by replacing all the bilinear terms $x_i y_j$ by z_{ij} and adding in the model the system described above. This relaxation is called the McCormick relaxation and is very commonly used.

In the case of the diet problem in the pig industry, the bilinear terms look like $x_{ti} y_{tj}$ for $i \in I, j \in J$ and $t \in \{1, 2\}$. x_1 and x_2 never appear in the same bilinear term, as well as y_1 and y_2 , x_1 and y_2 or x_2 and y_1 .

Let $x_{1ij} = x_{1i} y_{1j}$ and $x_{2ij} = x_{2i} y_{2j}$. Application of the McCormick relaxation to (P_{pig}) , yields the following problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_i^0 (x_{1ij} + x_{2ij}), \\ \text{s.t.} & \underline{d}_j^p \leq \sum_{i \in I} q_i^p (x_{1ij} + x_{2ij}) \leq \bar{d}_j^p \quad \forall p \in P, \forall j \in J, \\ & \underline{b} \leq A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \bar{b}, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_1} \\ u_{y_2} \end{pmatrix}, \\ & x_{1ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{y_1} x_{1i} - x_{1ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{x_{1i}} y_{1j} - x_{1ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{x_{1i}} u_{y_{1j}} - u_{x_{1i}} y_{1j} - u_{y_{1j}} x_{1i} + x_{1ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & x_{2ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{y_2} x_{2i} - x_{2ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{x_{2i}} y_{2j} - x_{2ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \\ & u_{x_{2i}} u_{y_{2j}} - u_{x_{2i}} y_{2j} - u_{y_{2j}} x_{2i} + x_{2ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \end{array} \right. \quad (P_{pigMC})$$

This problem is linear and we implemented it in AMPL and used CPLEX to solve it. When solved using CPLEX, we obtain the optimal cost which is less than the known lower bound in both typical instances. However the model can be improved by adding valid inequalities. Indeed, in (P_{pig}) , there appear the three following linear constraints

$$y_{1j} + y_{2j} \leq w_j, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} x_{1i} = 1, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} x_{2i} = 1. \quad (4)$$

By multiplying (3) by y_{1j} , as well as y_{2j} by (4), we get that

$$\begin{aligned} y_{1j} &= \sum_{i \in I} x_{1i} y_{1j}, \\ y_{2j} &= \sum_{i \in I} x_{2i} y_{2j}, \end{aligned}$$

which leads to the modification of the constraint (2) by

$$y_{1j} + y_{2j} = \sum_{i \in I} x_{1i} y_{1j} + x_{2i} y_{2j} \leq w_j \iff \sum_{i \in I} x_{1ij} + x_{2ij} \leq w_j.$$

Similarly, the constraints (3) and (4) can be modified in the two following

$$\begin{aligned} y_{1j} &= \sum_{i \in I} x_{1ij}, \\ y_{2j} &= \sum_{i \in I} x_{2ij}. \end{aligned}$$

Doing these modifications adds some valid inequalities which we hope improve the relaxation. And hopefully, solving this problem leads to a slight improvement. The optimal cost returned by solvers is 94.84 for instance 1 and 67.23 for instance 2, which are exactly the lower bounds already known given by solving (P_{PigId}) .

A close inspection of this model revealed that the McCormick relaxation including valid inequalities is, in fact, exactly the same linear problem that models the diet using the optimal cost feed at each day, namely (P_{PigId}) , the model giving the lower bound. Indeed, let $x_{ij} = x_{1ij} + x_{2ij}$ which correspond to the quantity of ingredient i for the diet of the day j . Then when it is replaced in the model (P_{PigMC}) we notice that it is separable and each subproblem corresponds exactly to (P_{SPigId_j}) problem for all $j \in J$.

The discussion allows us to state the following proposition.

Proposition 2 *The McCormick relaxation model and the ideal model are equivalent.*

This fact tends to confirm the conjecture that the minimum of our instances determined by nonlinear solvers is a global one.

3.3.2 Tawarmalani et al. convex hull

More recently, Tawarmalani et al. [21] stated a new result about the convex hull of a bilinear set.

Proposition 3 *Consider $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n (a_i x_i y_i + b_i x_i + c_i y_i) \geq r\}$, where, for each $i \in \{1, \dots, n\}$, a_i, b_i and c_i are non-negative and r is positive.*

Let $\eta_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \left(b_i x_i + c_i y_i + \sqrt{(b_i x_i + c_i y_i)^2 + 4a_i r x_i y_i} \right)$. Then, the convex hull of B is given by

$$\text{conv}(B) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \eta_i(x_i, y_i) \geq r \right\}.$$

Unlike the McCormick relaxation, this one is a nonlinear convex relaxation. It represents the convex hull of the bilinear set B . We will now apply this approach to the pig's diet problem. Because all coefficients in the objective function and constraints are positive in our instances, the relaxation can be applied only to the "greater or equal" constraints. The relaxation obtained is not convex since the problem still has some bilinear constraints of the type "less or equal" that are not included in the relaxation.

However, the new problem solved is a relaxation of the initial problem and its solution is a lower bound of the typical instances. Solving this problem using Ipopt, the optimal cost

computed is 89.54 for instance 1 and 62.08 which are far from their respective lower bounds which are 94.84 and 67.23.

This relaxation is supposed to be the convex hull of the set while McCormick is only a linear relaxation. The fact that the optimal solution of the Tawarmalani *et al.* relaxation is smaller than the one of McCormick relaxation is due to the bounds on variables. The next section is devoted to show how bounds on variables act on these two relaxations.

3.3.3 Illustration of McCormick and Tawarmalani relaxations

As an illustration of these two relaxations, consider the set

$$B = \{(x, y, z) \in [1, 5]^3 \mid xy + z \geq 4\}.$$

This set is represented by all the points belonging to $[1, 5]^3$ and above the surface on figure 2. Using equations determined in section 3.3.1, the feasible set given by the McCormick

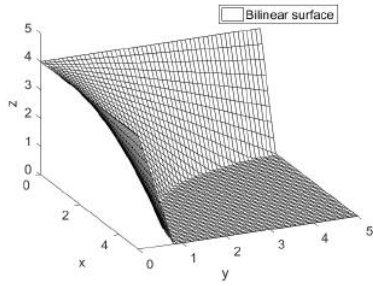


Fig. 2 Representation of the bilinear set $B = \{(x, y, z) \in [0, 5]^3 \mid xy + z \geq 4\}$.

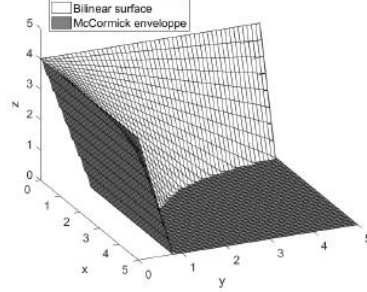


Fig. 3 Representation of the bilinear set B and the McCormick relaxation set B_M .

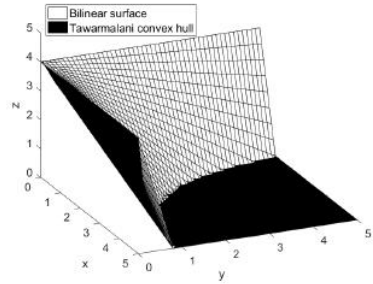


Fig. 4 Representation of the bilinear set B and the convex hull of Tawarmalani B_T .

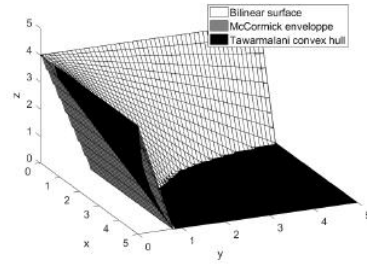


Fig. 5 Representation of the bilinear set B and both McCormick and Tawarmalani relaxations.

relaxation of B is

$$B_M = \left\{ (x, y, z) \in [0, 5]^3 \mid \begin{array}{l} z \geq 4 - 5x \\ z \leq 4 - 5y \end{array} \right\}$$

which is represented in figure 3 by all the points above the gray surface.

If we apply the proposition 3 to the set B , we get the following set

$$B_T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid 2\sqrt{xy} + z \geq 4\}$$

which is represented in figure 4 by all the points above the black surface. Finally, figure 5 includes both relaxations in addition to the initial bilinear surface.

We can see that both relaxations intersect each other. Thus, it may happen that the McCormick relaxation is better than Tawarmalani's *et al.* Even more interesting, under appropriate conditions, the McCormick relaxation can be strictly included in the convex hull describe by Tawarmalani *et al.* For example, if we consider the bilinear set

$$B = \{(x, y, z) \in [0, u_x] \times [0, u_y] \times [0, u_z] \mid xy + bz \geq r\}$$

then the convex hull is given by

$$B' = \{(x, y, z) \in [0, u_x] \times [0, u_y] \times [0, u_z] \mid \sqrt{rxy} + bz \geq r\}.$$

The convex relaxation for this set is given by the four following equations

$$xy \geq 0, \tag{5}$$

$$x(u_y - y) \geq 0, \tag{6}$$

$$(u_x - x)y \geq 0, \tag{7}$$

$$(u_x - x)(u_y - y) \geq 0. \tag{8}$$

By (6) and (7) and the definition of B , we can deduce that

$$r - bz \leq u_y x, \tag{9}$$

$$r - bz \leq u_x y. \tag{10}$$

Moreover we get by definition of B' that

$$r - bz \leq \sqrt{rxy}. \tag{11}$$

Then McCormick relaxation is strictly included in B' if and only if

$$\begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x y \leq \sqrt{rxy} \end{cases} \iff \begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x u_y xy \leq rxy \end{cases} \iff \begin{cases} u_y x \leq \sqrt{rxy} \\ u_x u_y \leq r \end{cases}$$

Thus if $r \geq u_x u_y$ then McCormick relaxation is always better than then convex hull of Tawarmalani *et al.* Figure 6 illustrates this case for the numerical example. Our typical instances present a similar situation that the one presented above. Its nonlinear convex relaxation does not help to determine the global solution and it is preferable to use McCormick relaxation when there are tight bounds on variables.

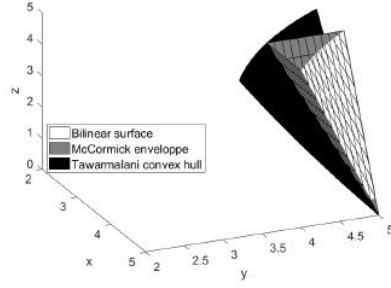


Fig. 6 Illustration when conditions are met so that McCormick relaxation is strictly included in the convex hull describe by Tawarmalani in proposition 3

3.3.4 SDP relaxation

The last convex relaxation that we present in this paper uses the semidefinite programming formulation. The idea to use it comes from the paper [3]. Every bilinear problem can be written as a quadratic program. Indeed, (P_{pig}) can be rewritten

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y} \quad x^t Q^0 y, \\ \text{s.t.} \quad x^t Q^p y \geq d^p \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \quad \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq b, \\ \quad \quad 0 \leq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq m. \end{array} \right.$$

The aim of the SDP relaxation is to write the problem as

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,y,Z} \quad f(x,y,Z), \\ \text{s.t.} \quad b \leq g(x,y,Z) \leq B, \\ \quad \quad Z \succeq 0, \end{array} \right.$$

where f and g are linear functions. First, let the inner product of two matrices A and B be defined as

$$A \bullet B = \text{tr}(AB).$$

A quadratic term $z^t Q z$ can then be written using the inner product of two matrices. Let $Z = z z^t$. Thus

$$z^t Q z = \sum_{i,j} Q_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j} Q_{ij} Z_{ij} = \text{tr}(QZ) = Q \bullet Z.$$

By a small change of variables $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ and adjusting the data matrices, we are able to state the bilinear problem as follows :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{z,Z} \quad Q^0 \bullet Z, \\ \text{s.t.} \quad Q^p \bullet Z \geq d^p \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \quad \quad Az \geq b, \\ \quad \quad 0 \leq z \leq u, \\ \quad \quad Z = z z^t. \end{array} \right.$$

It is then relaxed by replacing the constraint $Z = zz^t$ by

$$Z \succeq zz^t \iff Z - zz^t \succeq 0 \iff \begin{pmatrix} Z & z \\ z^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Thus, the SDP relaxation of a bilinear problem can be written as

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{z, Z} & Q^0 \bullet Z, \\ \text{s.t.} & Q^p \bullet Z \geq d^p \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ & Az \geq b, \\ & 0 \leq z \leq u, \\ & \begin{pmatrix} Z & z \\ z^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array} \right. \quad (P_{SDP})$$

Due to the shape of our typical instances, we can separate the problem by blocks. Indeed, variables x_1 and y_1 never appear multiplied by a variable form x_2 and y_2 . Thus, if we consider $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ and $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, then the problem looks like

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{z, Z} & Q^0 \bullet Z_1 + Q^0 \bullet Z_2, \\ \text{s.t.} & Q^p \bullet Z_1 + Q^p \bullet Z_2 \geq d^p \quad \forall p \in P, \\ & A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \geq b, \\ & 0 \leq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} Z_1 & z_1 \\ z_1^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \\ & \begin{pmatrix} Z_2 & z_2 \\ z_2^t & 1 \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array} \right. \quad (P_{PigSDP})$$

The dimensions of matrices being smaller, this trick should accelerate the computation of the solution of the SDP problem. To this problem we can add several valid inequalities. For example, the new variable Z_1 and Z_2 represent the quadratic term and then can be bounded below by 0 and above by uu^t .

The modeling was done in Matlab R2015b. Solving this problem using CVX [12, 11] and in particular the solver SDPT3 leads to an optimal cost of 94.84 for instance 1 and 67.23 for instance 2, namely exactly the lower bound already known.

After studying this model, we noticed that the SDP relaxation is the same problem that gives the lower bound, namely the ideal problem (P_{PigId}). For the same reasons that we claimed in 3.3.1, it is easy to see that by replacing $Z_1 + Z_2$ by a new term in (P_{PigSDP}) leads to solve a problem that determines the optimal cost diet at each day. Moreover, no additional valid inequalities can be added in order to improve it.

The discussion allows us to state the following proposition.

Proposition 4 *The SDP relaxation model and the ideal model are equivalent.*

One more time, the lower bound of the typical instance could not be improved and tends to confirm our conjecture that the solution computed by a nonlinear solver is global.

Conclusion

The bilinear problem applied to our typical instances in a strongly NP-hard problem. We prove it by establishing the equivalence to the pooling formulation. A solution can be found thanks to nonlinear solvers. For both instances, solving it with 20,000 random starting points showed that in 100% of cases the same local optimal point is computed. This led us to state the conjecture that this local solution is a global solution of the instances. The associated feasibility problem, which computes a feasible solution which has a lower optimal value, does not converge to any point which corroborates our conjecture. Moreover, global solvers cannot handle the full-size problem but determine a global solution for smaller problems which is equal to the local solution when we are looking for a solution with a smaller optimal value.

Other approaches presented in this paper are relaxations or approximation that support the conjecture.

We are able to get a mixed integer linear problem by discretizing some of the variables involved in bilinear terms. This approach leads to a solution close the global minimum of the bilinear problem. However, it is too slow to solve the entire problem due to the branch and bound algorithm used. As an example, solve the problem with 32 continuous variables and 14 integer variables (instead of 222) took around 10^6 seconds. However, the solution computed by this approach shows that the solution declared as a local optimum is close to the approximation of the global solution. It is a good method but not appropriate in our case since the problem is too large. Nevertheless, it confirms our conjecture for a small instance of our problem. Its continuous relaxation returns a value lower than the lower bound. Lagrangian relaxations of the discretized and bilinear problems do not improve the lower bounds for any of the instances. Finally, we presented three convex relaxations for bilinear terms. These approaches provide lower bounds of the bilinear problem but do not improve the one already known. However, some of them provide the same lower bound and the gap between lower and upper bound is at most 2%. They are good bounds but none of the methods that we tried improved it due to peculiar shape of our diet problem. In the general case, these methods can produce a good lower bound. The fact that for smaller problems the global optimal solution is equal to the one returned by a local solver, added to that all approaches presented in this paper do not improve the solution regardless the data used, tends to confirm our conjecture : "the solution returned by nonlinear solvers as a local optimal solution is indeed a global solution" for diet models.

References

1. Alfaki, M., Haugland, D.: Strong formulations for the pooling problem. *Journal of Global Optimization* **56**(3), 897–916 (2013). DOI 10.1007/s10898-012-9875-6
2. Jean dit Bailleul, P.: Modélisation et optimisation du revenu net de l'engraissement. Master's thesis, Université Laval (1998)
3. Bao, X., Sahinidis, N.V., Tawarmalani, M.: Semidefinite relaxations for quadratically constrained quadratic programming: A review and comparisons. *Mathematical Programming* **129**(1), 129–157 (2011). DOI 10.1007/s10107-011-0462-2
4. Beaudoin, I.: Méthodes d'optimisation du revenu net de l'engraissement porcin. Master's thesis, Université de Sherbrooke (2001)
5. Belotti, P.: Couenne: a user's manual
6. Ben-Tal, A., Eiger, G., Gershovitz, V.: Global minimization by reducing the duality gap. *Mathematical Programming* **63**(1), 193–212 (1994). DOI 10.1007/BF01582066
7. Dantzig, G.B.: *Linear Programming and Extensions*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press (1963)

8. Dantzig, G.B.: The diet problem. *Interfaces* **20**, 43 – 47 (1990)
9. Fourer, R., Gay, D., Kernighan, B.: *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Scientific Press series. Thomson/Brooks/Cole (2003)
10. Garille, S.G., Gass, S.I.: Stigler's diet problem revisited. *Operations Research* **49**(1), 1–13 (2001). DOI 10.1287/opre.49.1.1.11187
11. Grant, M., Boyd, S.: Graph implementations for nonsmooth convex programs. In: V. Blondel, S. Boyd, H. Kimura (eds.) *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, pp. 95–110. Springer-Verlag Limited (2008)
12. Grant, M., Boyd, S.: CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1 (2014)
13. Haverly, C.A.: Studies of the behavior of recursion for the pooling problem. *SIGMAP Bull.* (25), 19–28 (1978). DOI 10.1145/1111237.1111238
14. Joannopoulos, E., Dubeau, F., Dussault, J.P., Pomar, C.: Diet problems. In: *Handbook of Operations Research in Agriculture and the Agri-Food Industry*, pp. 397–417 (2015)
15. Lancaster, L.M.: The evolution of the diet model in managing food systems. *Interfaces* **22**, 59–68 (1992)
16. Lancaster, L.M.: The history of the application of mathematical programming to menu planning. *European Journal of Operational Research* **57**, 339–347 (1992)
17. McCormick, G.P.: Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part I - Convex underestimating problems. *Mathematical Programming* **10**(1), 147–175 (1976). DOI 10.1007/BF01580665
18. Rodriguez, M.A., Vecchiotti, A.: A comparative assessment of linearization methods for bilinear models. *Computers and Chemical Engineering* **48**, 218–233 (2013). DOI 10.1016/j.compchemeng.2012.09.011
19. Sahinidis, N.V.: BARON 14.3.1: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs, *User's Manual* (2014)
20. Stigler, G.J.: The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics* **27**(2), 303–314 (1945)
21. Tawarmalani, M., Richard, J.P.P., Chung, K.: Strong valid inequalities for orthogonal disjunctions and bilinear covering sets. *Mathematical Programming* **124**(1-2), 481–512 (2010). DOI 10.1007/s10107-010-0374-6
22. Tawarmalani, M., Sahinidis, N.V.: A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming* **103**, 225–249 (2005)

Annexe H

Codes AMPL des méthodes 1MF et p HF

H.1 Méthode 1MF

H.1.1 Fichier modèle : `dmf.mod`

```
#-----
#Ensembles
#-----
set ING;
set NP;
set NACA;
set AA;
set EN;
set PHASES := 1..111;
#-----
# Apport en nutriments (decomposition des matieres premieres)
#-----
param aNP {ING,NP};
param aNACA {ING,NACA};
param aEN {ING,EN};
param aAA {ING,AA};
#-----
# Besoins de l'animal
#-----
param bNP {NP,PHASES};
param bAA {AA,PHASES};
param bNACA_inf {NACA,PHASES};
param bNACA_sup {NACA,PHASES};
param bEN {EN,PHASES};
```

```

#-----
# Parametres de prix des ingredients et taux d'incorporation maximum
#-----
param c {ING};
param xmax {ING};
#-----
# Consommation (en P, en N et maximum)
#-----
param consoPHOS {PHASES};
param consoN {PHASES};
param consoMAX{PHASES};
#-----
# Variables (XA, XB : melanges; Y,Z : quantités journalières de XA, XB, respectivement)
#-----
var XA {ING};
var XB {ING};
var Y {PHASES};
var Z {PHASES};

#-----
# Fonction objectif
#-----
minimize cout_melange :    sum {p in PHASES, i in ING} c[i]*(Y[p]*XA[i]+Z[p]*XB[i]);

#-----
# Contraintes
#-----
subject to
    cte_NACA_inf{m in NACA,p in PHASES} :
        bNACA_inf[m,p] - (sum{i in ING} aNACA[i,m] * (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i])) <= 0;
    cte_NACA_sup{m in NACA, p in PHASES}:
        0 <= bNACA_sup[m,p] - (sum{i in ING} aNACA[i,m] * (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i]));
    cte_EN{o in EN, p in PHASES}:
        sum{i in ING} aEN[i,o] * (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i]) = bEN[o,p];
    cte_AA{o in AA, p in PHASES} :
        sum{i in ING} aAA[i,o] * (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i]) - bAA[o,p] >= 0;
    cte_ratio_CAP_inf {p in PHASES} :
        (sum{i in ING} aNACA[i,'ca']* (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i]))
        - 1.5 * (sum {i in ING} aNP[i,'ptotal']*(Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i])) <= 0;
    cte_ratio_CAP_sup {p in PHASES} :
        (sum{i in ING} aNACA[i,'ca']* (Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i]))
        - 1 * (sum {i in ING} aNP[i,'ptotal']*(Y[p]*XA[i] + Z[p] * XB[i])) >= 0;

    cte_premixA :
        XA['premix'] = 0.005;
    cte_premixB :
        XB['premix'] = 0.005;
    cte_sum_A:
        sum{i in ING} XA[i] = 1;
    cte_sum_B:
        sum{i in ING} XB[i] = 1;

```



```

cte_ING_A {i in ING } :
    0 <= XA[i] <= xmax[i];
cte_ING_B {i in ING } :
    0 <= XB[i] <= xmax[i];
cte_inf_Y {p in PHASES} :
    0 <= Y[p];
cte_inf_Z {p in PHASES} :
    0 <= Z[p];
cte_QTE_max {p in PHASES} :
    Y[p] + Z[p] <= consoMAX[p];

```

H.1.2 Fichier commandes : dmf.run

```

reset;
model dmf.mod
data dmf.dat

option solver ipopt;
option randseed 0;
option presolve 0;

#-----
# Initialisation
#-----
let {i in ING} XA[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XB[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {p in PHASES} Y[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} Z[p] := consoMAX[p] * Uniform01();

#-----
# Resolution
#-----
solve;

#-----
# Affichage (valeur optimale, rejets de P, rejets de N, temps de resolution)
#-----
display cout_melange;
display sum{p in PHASES}
    (sum {i in ING} aNP[i,'ptotal']*(Y[p]*XA[i]+Z[p]*XB[i]) - consoPHOS[p]);
display sum{p in PHASES}
    (sum {i in ING} aNP[i,'Ntotal']*(Y[p]*XA[i]+Z[p]*XB[i]) - consoN[p]);
display _solve_time;

```

H.2 Méthode p HF

H.2.1 Fichier modèle : `hfp.mod`

Le code de la méthode p HF est semblable à celui présenté dans la section H.1.1. Concernant le fichier modèle, il suffit de remplacer les termes

$$Y[p]*XA[i]+Z[p]*XB[i]$$

par

$$Y[p]*XA[i] + Z[p]*XB[i] + W[p]*XC[i] + V[p]*XD[i] \\ + U[p]*XE[i] + T[p]*XF[i] + S[p]*XG[i] + R[p]*XH[i]$$

où Y, Z, W, V, U, T, S et R sont les variables de quantité associées aux variables de mélanges $XA, XB, XC, XD, XE, XF, XG$ et XH respectivement.

Il faut également ajouter, pour chaque mélange k , la contrainte sur le prémix ($Xk[premix] = 1$) et la contrainte de proportion ($\sum_{i \in I} Xk[i] = 1$), la positivité de chaque quantité. Enfin, la dernière modification est de remplacer la contrainte `cte_QTE_max` par

$$Y[p] + Z[p] + W[p] + V[p] + U[p] + T[p] + S[p] + R[p] \leq \text{consoMAX}[p].$$

Ce fichier modèle est valable pour les alimentation p HF pour $p = 1$ à $p = 7$.

H.2.2 Fichier commandes : `hfp.run`

Le fichier commande diffère légèrement et permet de choisir quel nombre de phase (p) nous considérons pour la méthode p HF.

```
reset;
model hfp.mod
data hfp.dat

option solver ipopt;
option presolve 0;
option randseed 0;

#-----
```

```

# Initialisation
#-----
let {i in ING} XA[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XB[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XC[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XD[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XE[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XF[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XG[i] := xmax[i] * Uniform01();
let {i in ING} XH[i] := xmax[i] * Uniform01();

let {p in PHASES} Y[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} Z[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} W[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} V[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} U[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} T[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} S[p] := consoMAX[p] * Uniform01();
let {p in PHASES} R[p] := consoMAX[p] * Uniform01();

#-----
# Les commandes sont valables pour differentes valeurs de p, il suffit de decommenter
# les lignes correspondant a la valeur desiree (ici, par exempl p=3 est decommente)
#-----
# MH2      #chgt phases : 56
#-----
#fix {p in 56..111} Y[p] := 0;
#fix {p in 1..55}   W[p] := 0;

#fix {p in 1..111} V[p] := 0;
#fix {p in 1..111} U[p] := 0;
#fix {p in 1..111} T[p] := 0;
#fix {p in 1..111} S[p] := 0;
#fix {p in 1..111} R[p] := 0;

#-----
# MH3      #chgt phases : 38 75
#-----
fix {p in 38..111} Y[p] := 0;
fix {p in 75..111} Z[p] := 0;
fix {p in 1..37}   W[p] := 0;
fix {p in 1..74}   V[p] := 0;

fix {p in 1..111} U[p] := 0;
fix {p in 1..111} T[p] := 0;
fix {p in 1..111} S[p] := 0;
fix {p in 1..111} R[p] := 0;

#-----
# MH4      #chgt phases : 28 56 84
#-----

```

```

#fix {p in 28..111} Y[p] := 0;
#fix {p in 56..111} Z[p] := 0;
#fix {p in 1..27} W[p] := 0;
#fix {p in 84..111} W[p] := 0;
#fix {p in 1..55} V[p] := 0;
#fix {p in 1..83} U[p] := 0;

```

```

#fix {p in 1..111} T[p] := 0;
#fix {p in 1..111} S[p] := 0;
#fix {p in 1..111} R[p] := 0;

```

```

#-----
# MH5      #chgt phases : 23 45 67 89
#-----

```

```

#fix {p in 23..111} Y[p] := 0;
#fix {p in 45..111} Z[p] := 0;
#fix {p in 1..22} W[p] := 0;
#fix {p in 67..111} W[p] := 0;
#fix {p in 1..44} V[p] := 0;
#fix {p in 89..111} V[p] := 0;
#fix {p in 1..66} U[p] := 0;
#fix {p in 1..88} T[p] := 0;

```

```

#fix {p in 1..111} S[p] := 0;
#fix {p in 1..111} R[p] := 0;

```

```

#-----
# MH6      #chgt phases : 19 37 55 74 93
#-----

```

```

#fix {p in 19..111} Y[p] := 0;
#fix {p in 37..111} Z[p] := 0;
#fix {p in 1..18} W[p] := 0;
#fix {p in 55..111} W[p] := 0;
#fix {p in 1..36} V[p] := 0;
#fix {p in 74..111} V[p] := 0;
#fix {p in 1..54} U[p] := 0;
#fix {p in 93..111} U[p] := 0;
#fix {p in 1..73} T[p] := 0;
#fix {p in 1..92} S[p] := 0;

```

```

#fix {p in 1..111} R[p] := 0;

```

```

#-----
# MH7      #chgt phases : 16 32 48 64 80 96
#-----

```

```

#fix {p in 16..111} Y[p] := 0;
#fix {p in 32..111} Z[p] := 0;
#fix {p in 1..15} W[p] := 0;
#fix {p in 48..111} W[p] := 0;
#fix {p in 1..31} V[p] := 0;
#fix {p in 64..111} V[p] := 0;

```

```

#fix {p in 1..47}    U[p] := 0;
#fix {p in 80..111} U[p] := 0;
#fix {p in 1..63}    T[p] := 0;
#fix {p in 96..111} T[p] := 0;
#fix {p in 1..79}    S[p] := 0;
#fix {p in 1..95}    R[p] := 0;

#-----
# Resolution
#-----
solve;

#-----
# affichage (cout, rejets P, rejets N)
#-----
display cout_melange;
display sum{p in PHASES}(sum {i in ING} aNP[i,'ptotal']*(Y[p]*XA[i] + Z[p]*XB[i] +
    W[p]*XC[i] + V[p]*XD[i] + U[p]*XE[i] + T[p]*XF[i] + S[p]*XG[i] + R[p]*XH[i])
    - consoPHOS[p]);
display sum{p in PHASES}(sum {i in ING} aNP[i,'Ntotal']*(Y[p]*XA[i] + Z[p]*XB[i] +
    W[p]*XC[i] + V[p]*XD[i] + U[p]*XE[i] + T[p]*XF[i] + S[p]*XG[i] + R[p]*XH[i])
    - consoN[p]);

```

Bibliographie

- [1] M. Abramson, C. Audet, G. Couture, J. Dennis, Jr., S. Le Digabel, and C. Tribes. The NOMAD project. Software available at <https://www.gerad.ca/nomad>, 2015.
- [2] W. Adams and H. Serali. A tight linearization and an algorithm for zero-one quadratic programming problems. *Management Science*, 32(1970) :1274–1291, 1986.
- [3] A. Aggarwal and C. A. Floudas. A decomposition approach for global optimum search in QP, NLP and MINLP problems. *Annals of Operations Research*, 25 :119–145, 1990.
- [4] F. Al-Khayyal. Generalized bilinear programming : Part I. Models, applications and linear programming relaxation. *European Journal of Operational Research*, 60(3) :306–314, 1992.
- [5] S. Alarie, C. Audet, B. Jaumard, and G. Savard. Concavity cuts for disjoint bilinear programming. *Mathematical Programming*, 90(2) :373–398, Apr 2001.
- [6] M. Alfaki. *Models and Solution Methods for the Pooling Problem*. PhD thesis, University of Bergen, 2012.
- [7] M. Alfaki and D. Haugland. A cost minimization heuristic for the pooling problem. *Annals of Operations Research*, (D) :1–15, 2013.
- [8] M. Alfaki and D. Haugland. Strong formulations for the pooling problem. *Journal of Global Optimization*, 56(3) :897–916, Jul 2013.
- [9] C. Audet. Pooling problem : Alternate formulations and solution methods. *Management Science*, 50(6) :761–776, 2004.

- [10] C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, and G. Savard. A symmetrical linear maxmin approach to disjoint bilinear programming. *Mathematical Programming*, 85(3) :573–592, Aug 1999.
- [11] C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, and G. Savard. A branch and cut algorithm for non-convex quadratically constrained quadratic programming. *Mathematical Programming*, 87(1) :131–152, Jan 2000.
- [12] T. E. Baker and L. S. Lasdon. Successive Linear Programming at Exxon. *Management Science*, 31(3) :264–274, 1985.
- [13] X. Bao, N. V. Sahinidis, and M. Tawarmalani. Semidefinite relaxations for quadratically constrained quadratic programming : A review and comparisons. *Mathematical Programming*, 129(1) :129–157, 2011.
- [14] I. Beaudoin. Méthodes d’optimisation du revenu net de l’engraissement porcin. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, 2001.
- [15] I. Beaudoin, F. Dubeau, and C. Pomar. Multi-objective optimization models for swine production system east-west journal of mathematics. *Computational Mathematics and modeling, Bangkok, Thailand a special volume*, pages 197–206, 2002.
- [16] P. Belotti, J. Lee, L. Liberti, F. Margot, and A. Wächter. Branching and bounds tightening techniques for non-convex MINLP. *Optimization Methods and Software*, 24(4-5) :597–634, 2009.
- [17] P. Belotti, A. J. Miller, and M. Namazifar. Valid inequalities and convex hulls for multilinear functions. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36(C) :805–811, 2010.
- [18] P. Belotti, A. J. Miller, and M. Namazifar. Linear inequalities for bounded products of variables. *SIAG/OPT Views-and-News*, 22(1) :1–7, 2011.
- [19] A. Ben-Tal, G. Eiger, and V. Gershovitz. Global minimization by reducing the duality gap. *Mathematical Programming*, 63(1) :193–212, 1994.
- [20] H. Benchakroun, F. Dubeau, J.-P. Dussault, P. J. dit Bailleul, and C. Pomar. Revision of the traditionnal diet formulation model. Technical Report 184, Université de Sherbrooke, 1996.

- [21] J. Black, R. Campbell, I. Williams, K. James, and G. Davies. Simulation of energy and amino acid utilisation in the pig. *Research and Development in Agriculture*, 3 :121–145, 1986.
- [22] D. Bourdon, J. Dourmad, and Y. Henry. Réduction des rejets azotés chez les porcs en croissance par la mise en oeuvre de l'alimentation multiphase, associée à l'abaissement du taux azoté. *Compte rendu des 27^{ième} Journées de la Recherche Porcine*, pages 269–278, 1995.
- [23] S. Boyd, S. J. Kim, L. Vandenberghe, and A. Hassibi. A tutorial on geometric programming. *Optimization and Engineering*, 8(1) :67–127, 2007.
- [24] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*, volume 25. 2010.
- [25] J. Bracken and J. T. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*, 21(1) :37–44, 1973.
- [26] L. Brossard, N. Quiniou, J.-Y. Dourmad, Y. Salaün, and J. Van Milgen. Définir des stratégies alimentaires alliant performance économique et impact environnemental grâce à la modélisation du groupe de porcs en croissance. In *Compte rendu des 42^{ième} Journées de la Recherche Porcine*, pages 131–132, 2010.
- [27] J. Czyzyk, M. P. Mesnier, and J. J. Moré. The NEOS server. *IEEE Journal on Computational Science and Engineering*, 5(3) :68–75, 1998.
- [28] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press, 1963.
- [29] G. B. Dantzig. The diet problem. *Interfaces*, 20(4) :43–47, 1990.
- [30] S. S. Dey and A. Gupte. Analysis of MILP Techniques for the Pooling Problem. *Operations Research*, 63(2) :412–427, 2015.
- [31] E. D. Dolan. The NEOS server 4.0 administrative guide. Technical Memorandum ANL/MCS-TM-250, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, 2001.
- [32] F. Dubeau, P.-O. Julien, and C. Pomar. Etude de cas : un porc in dans un environnement sain. *INFOR*, 46(3) :199–217, 2008.

- [33] F. Dubeau, P.-O. Julien, and C. Pomar. Formulating diets for growing pigs : economic and environmental considerations. *Annals of Operations Research*, 190 :239–269, 2011.
- [34] G. Emmans. A model of the growth and feed intake of ad libitum fed animals, particularly poultry. *Computers in animal production*, 5 :103–110, 1981.
- [35] J. E. Falk. A linear max-min problem. *Mathematical Programming*, 5(1) :169–188, 1973.
- [36] J. J. R. Feddes, C. A. Ouellette, and J. J. Leonard. A system for providing protein for pigs in intermediately sized grower/finisher barns. *Canadian Agricultural Engineering*, 42(4) :209–213, 2000.
- [37] C. A. Floudas and C. E. Gounaris. A review of recent advances in global optimization. *Journal of Global Optimization*, 45(1) :3–38, 2009.
- [38] C. A. Floudas and R. Misener. Advances for the Pooling Problems : Modelling, Global Optimization, and Computational Studies. *Applied and Computational Mathematics*, 1(May) :3–22, 2009.
- [39] C. A. Floudas and P. M. Pardalos, editors. *State of the Art in Global Optimization*. Springer US, 1996.
- [40] L. R. Foulds, D. Haugland, and K. Jörnsten. A bilinear approach to the pooling problem. *Optimization*, 24(1-2) :165–180, 1992.
- [41] R. Fourer, D. Gay, and B. Kernighan. *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*. Brooks/Cole Publishing Company / Cengage Learning, 2002.
- [42] S. A. Gabriel, R. García-Bertrand, P. Sahakij, and A. J. Conejo. A practical approach to approximate bilinear functions in mathematical programming problems by using Schur’s decomposition and SOS type 2 variables. *Journal of the Operational Research Society*, 57(8) :995–1004, 2006.
- [43] G. Gallo and A. Ülkcü. Bilinear programming : An exact algorithm. *Mathematical Programming*, 12(1) :173–194, 1977.
- [44] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.

- [45] S. G. Garille and S. I. Gass. Stigler’s diet problem revisited. *Operations Research*, 49(1) :1–13, 2001.
- [46] M. Grant and S. Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 95–110. Springer-Verlag Limited, 2008.
- [47] M. Grant and S. Boyd. CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1, Mar. 2014.
- [48] W. Gropp and J. J. Moré. Optimization environments and the NEOS server. In M. D. Buhman and A. Iserles, editors, *Approximation Theory and Optimization*, pages 167–182. Cambridge University Press, 1997.
- [49] A. Gupte, S. Ahmed, and S. S. Dey. Pooling problems : relaxations and discretizations. *Optimization Online*, 2013.
- [50] A. Gupte, S. Ahmed, S. S. Dey, and M. S. Cheon. Relaxations and discretizations for the pooling problem. *Journal of Global Optimization*, 67(3) :631–669, 2017.
- [51] C. A. Haverly. Studies of the behavior of recursion for the pooling problem. *SIGMAP Bull.*, (25) :19–28, 1978.
- [52] D. Henrion and J. B. Lasserre. Solving nonconvex optimization problems. *Control Systems IEEE*, 24(3) :72–83, 2004.
- [53] H. Hijazi. Perspective Envelopes for Bilinear Functions. *Optimization Online*, 2015.
- [54] P. Jean dit Bailleul. Modélisation et optimisation du revenu net de l’engraissement. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 1998.
- [55] P. Jean dit Bailleul, J. Rivest, F. Dubeau, and C. Pomar. Reducing nitrogen excretion in pigs by modifying the traditional least-cost formulation algorithm. *Livestock Production Science*, 72(3) :199 – 211, 2001.
- [56] É. Joannopoulos. Nouvelles approches de modélisation et d’optimisation de diète animale. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, 2012.

- [57] É. Joannopoulos, F. Dubeau, J.-P. Dussault, and C. Pomar. Diet problems. In *Handbook of Operations Research in Agriculture and the Agri-Food Industry*, chapter 18, pages 397–417. Springer-Verlag, New York, L.M. Plà-Aragonés edition, 2015.
- [58] S. Kolodziej, P. M. Castro, and I. E. Grossmann. Global optimization of bilinear programs with a multiparametric disaggregation technique. *Journal of Global Optimization*, 57(4) :1039–1063, 2013.
- [59] H. Konno. A cutting plane algorithm for solving bilinear programs. *Mathematical Programming*, 11(1) :14–27, 1976.
- [60] H. Konno and S. U. D. of Operations Research. Operations Research House. *Bilinear Programming : Part One : Algorithm for Solving Bilinear Programs*. 1971.
- [61] L. Lancaster. The evolution of the diet model in managing food systems. *Interfaces*, 22 :59–68, 1992.
- [62] L. Lancaster. The history of the application of mathematical programming to menu planning. *European Journal of Operational Research*, 57 :339–347, 1992.
- [63] S. Le Digabel. Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear Optimization with the MADS algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 37(4) :44 :1–44 :15, 2011.
- [64] M.-P. Letourneau-Montminy, C. Boucher, C. Pomar, F. Dubeau, and J.-P. Dussault. Impact de la méthode de formulation et du nombre de phases d’alimentation sur le coût d’alimentation et les rejets d’azote et de phosphore chez le porc charcutier. In *Compte rendu des 37^{ième} Journées de la Recherche Porcine*, pages 25–32, 2005.
- [65] L. Liberti and C. C. Pantelides. An exact reformulation algorithm for large nonconvex NLPs involving bilinear terms. *Journal of Global Optimization*, 36(2) :161–189, 2006.
- [66] S. Mackenzie, M. Wallace, and I. Kyriazakis. How effective can environmental taxes be in reducing the environmental impact of pig farming systems? *Agricultural Systems*, 152 :131 – 144, 2017.
- [67] G. P. McCormick. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs : Part I - Convex underestimating problems. *Mathematical Programming*, 10(1) :147–175, 1976.

- [68] P. Morel, D. Sirisatien, and G. Wood. Effect of pig type, costs and prices, and dietary restraints on dietary nutrient specification for maximum profitability in grower-finisher pig herds : A theoretical approach. *Livestock Science*, 148(3) :255 – 267, 2012.
- [69] B. A. Murtagh and M. Saunders. MINOS, Stanford Business Software, Inc., Mountain View, CA , USA.
- [70] J. Nash. Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics, Second Series*, 54(2) :286–295, 1951.
- [71] National Research Council. *Nutrient Requirements of Swine : Tenth Revised Edition*. The National Academies Press, Washington, DC, 1998.
- [72] National Research Council. *Nutrient Requirements of Swine : Eleventh Revised Edition*. The National Academies Press, Washington, DC, 2012.
- [73] A. V. Orlov. Numerical solution of bilinear programming problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 48(2) :225–241, 2008.
- [74] L. Palacios-Gomez, F.Lasdon and M. Engquist. Nonlinear Optimization by Successive Linear Programming. *Management Science*, 28(10) :1106–1120, 1982.
- [75] P. M. Pardalos and H. E. Romeijn, editors. *Handbook of Global Optimization*, volume 62. Springer US, 2002.
- [76] J. Patience, P. Thacker, C. De Lange, and P. S. Centre. *Swine Nutrition Guide*. Prairie Swine Centre, University of Saskatchewan, 1995.
- [77] J. C. Pekas. Effect of gastric-feeding on feed consumption, growth, organ size, and body composition of swine. *Appetite*, 4(2) :87–95, 1983.
- [78] C. Pomar, F. Dubeau, M.-P. Létourneau-Montminy, C. Boucher, and P.-O. Julien. Reducing phosphorus concentration in pig diets by adding an environmental objective to the traditional feed formulation algorithm. *Livestock Science*, 111 :16 – 27, 2007.
- [79] C. Pomar, F. Dubeau, M.-P. Letourneau-Montminy, M. Mahé, P.-O. Julien, and C. Jon-dreville. Réduction de l’excrétion de phosphore et d’azote chez le porc charcutier par l’ajout d’un objectif environnemental dans l’algorithme traditionnel de formulation. In *Compte rendu des 36^{ième} Journées de la Recherche Porcine*, pages 251–258, 2004.

- [80] C. Pomar and J.-J. Matte. Effet de l’incorporation d’écailles d’avoine dans l’aliment servi a volonte sur le rationnement en nutriments la prise alimentaire et les performances de croissance du porc en finition. In *Compte rendu des 27^{ième} Journées de la Recherche Porcine*, pages 231–236, 1995.
- [81] C. Pomar, J. Pomar, F. Dubeau, É. Joannopoulos, and J.-P. Dussault. The impact of daily multiphase feeding on animal performance, body composition, nitrogen and phosphorus excretions, and feed costs in growing-finishing pigs. *Animal*, 8(5) :704–713, 2014.
- [82] D. Revell and I. Williams. *A review - physiological control and manipulation of voluntary food intake*, volume 4, pages 55–80. Australasian Pig Science Association, 1993.
- [83] M. A. Rodriguez and A. Vecchietti. A comparative assessment of linearization methods for bilinear models. *Computers & Chemical Engineering*, 48 :218–233, 2013.
- [84] M. Ruiz. *Une approche exacte de résolution de problèmes de pooling appliquée à la fabrication d’aliments*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2006.
- [85] M. Ruiz, O. Briant, J. M. Clochard, and B. Penz. Large-scale standard pooling problems with constrained pools and fixed demands. *Journal of Global Optimization*, 56(3) :939–956, 2013.
- [86] H. S. Ryoo and N. V. Sahinidis. Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design. *Computers and Chemical Engineering*, 19(5) :551–566, 1995.
- [87] N. V. Sahinidis. *BARON 14.3.1 : Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs*, User’s Manual, 2014.
- [88] N. V. Sahinidis and M. Tawarmalani. Accelerating Branch-and-Bound through a Modeling Language Construct for Relaxation-Specific Constraints. *Journal Of Global Optimization*, 32(2) :259–280, 2005.
- [89] R. A. Sarker and E. A. Gunn. A simple SLP algorithm for solving a class of nonlinear programs. *European Journal of Operational Research*, 101(1) :140–154, 1997.

- [90] H. Serali and C. Shetty. A finitely convergent algorithm for bilinear programming problems using polar cuts and disjunctive face cuts. *Mathematical Programming*, 19 :14–31, 1980.
- [91] H. D. Serali. *Tight relaxations for nonconvex optimization problems using the Reformulation-Linearization Convexification Technique (RLT)*, volume 2, chapter 1, pages 1–64. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [92] H. D. Serali and A. Alameddine. A new reformulation-linearization technique for bilinear programming problems. *Journal of Global Optimization*, 2(4) :379–410, 1992.
- [93] Y. Shi, H. D. Tuan, H. Tuy, and S. Su. Global optimization for optimal power flow over transmission networks. *Journal of Global Optimization*, pages 1–16, 2017.
- [94] R. Steuer. *Multiple Criteria Optimization*. New York : Wiley, 1986.
- [95] G. J. Stigler. The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27(2) :303–314, 1945.
- [96] M. Tawarmalani, J. P. P. Richard, and K. Chung. Strong valid inequalities for orthogonal disjunctions and bilinear covering sets. *Mathematical Programming*, 124(1-2) :481–512, 2010.
- [97] M. Tawarmalani and N. V. Sahinidis. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*, 103 :225–249, 2005.
- [98] M. Tawarmalani and N. V. Sahinidis. A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization. *Mathematical Programming*, 103 :225–249, 2005.
- [99] T. V. Thieu. A note on the solution of bilinear programming problems by reduction to concave minimization. *Mathematical Programming*, 41(1-3) :249–260, 1988.
- [100] C. van der Peet-Schwering, A. Jongbloed, and A. Aarnink. Nitrogen and phosphorus consumption, utilisation and losses in pig production : The netherlands. *Livestock Production Science*, 58(3) :213 – 224, 1999.
- [101] C. van der Peet-Schwering, N. Verdoes, and G. Beelen. Effect of feeding and housing on the ammonia emission of growing and finishing pig facilities. *Research Institute for Pig Husbandry*, 5.3 :27–28, 1996.

- [102] J. van Milgen, A. Valancogne, S. Dubois, J. Y. Dourmad, B. Sève, and J. Noblet. Inraporc : A model and decision support tool for the nutrition of growing pigs. *Animal Feed Science and Technology*, 143(1-4) :387–405, 2008.
- [103] R. Vanderbei. Loqo user’s manual-version 4.05. Technical report, Princeton University School of Engineering and Applied Science Department of Operations Research and Financial Engineering Princeton, New Jersey 08544, 2006.
- [104] H. Von Stackelberg. *Market structure and equilibrium*. Springer, 2011.
- [105] A. Wächter and L. Biegler. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106 :25–57, 2006.
- [106] A. Wald. Statistical decision functions. *Ann. Math. Statist.*, 20(2) :165–205, 06 1949.
- [107] E. Whittemore, G. C. Emmans, and I. Kyriazakis. The relationship between live weight and the intake of bulky foods in pigs. *Animal Science*, 76(1) :89–100, 2003.
- [108] J. W. Wilton, C. A. Morris, A. O. Leigh, E. A. Jenson, and W. C. Pfeiffer. A linear programming model for beef cattle production. *Canadian journal of animal science*, 54(4) :693–707, 1974.